



Brandeis University
Library



*As for the wise, their
body alone perishes in
this world – Rashi*



Digitized by the Internet Archive
in 2011 with funding from
Boston Library Consortium Member Libraries

THE

OF

THE

THE

THE

THE

THE

THE

THE

THE

THE

THE

THE

THE

THE

THE

THE

THE

THE

MECHANICA
SIVE
MOTVS
SCIENTIA
ANALYTICE

EXPOSITA

AVCTORE

LEONHARDO EVLERO

ACADEMIAE IMPER. SCIENTIARVM MEMBRO ET
MATHESEOS SVBLIMIORIS PROFESSORE.

TOMVS II.

*INSTAR SVPPLEMENTI AD COMMENTAR.
ACAD. SCIENT. IMPER.*



PETROPOLI

EX TYPOGRAPHIA ACADEMIAE SCIENTIARVM.

A. 1736.

PRAEFATIO

Quemadmodum in Tomo primo motus liberos corporum a quibuscunque potentiis sollicitatorum exposui, ita in hoc Tomo altero motus non liberos pertractare constitui; quae differentia in motus explicatione tanti est momenti, ut ex ea merito totius operis diuisio sit facta. In motu enim libero via a corpore descripta cum ex motu iam insito, tum ex potentiis tam absolutis quam resistentia, quibus corpus afficitur, determinatur, quia praeter potentias et resistentiam nihil adesse ponitur, quod corporis motum determinet. Atque idcirco motus liberi haec est primaria proprietas, ut via a corpore descripta omnino non prematur; canalis scilicet secundum viam, quam corpus describere debet, exacte incuruatus, a corpore transeunte nullam omnino pressionem sustinebit, sed corpus per eum libere transibit. In motu autem non libero praeter potentias et resistentiam, quibus corpus sollicitatur, viam praescriptam esse ponimus, ita ut corpus sit coactum in hac via moueri. Haec ergo via praescripta ad instar canalis commode considerari potest, in quo corpus mouetur, neque ex eo erumpere potest. Cum igitur in istiusmodi motibus data sit via, in qua corpus moueri debet, inquirendum est,

):(2

quan-

quantam corpus a quibuscunque potentiis et resistentia sollicitatum in singulis locis habiturum sit celeritatem, quippe quæ cognita totus motus perfecte cognoscitur. Praeterea autem cum corpus, nisi in hoc canali esset inclusum, aliam lineam describeret, retinebit saltem in canali conatum in ea linea, in qua si liberum esset, moueretur, progrediendi, hocque conatu latera canalis premet, et nisi satis habeant firmitatis re ipsa disrumpet. Hanc ob rem praeter celeritatem, quam corpus in singulis canalis locis habebit, determinari debet quoque pressio, quam in latera canalis exeret, eiusque pressionis directio, quo firmitas laterum canalis ad corpus retinendum requisita cognoscatur. Huiusmodi autem motus non liberi etiam sine canali aliis modis produci possunt, id quod observare licet in pendulis, atque in fundis, quibus corpus itidem in data linea moveri cogitur. Pendulis enim, prout Hugenius docuit, effici potest, ut corpus in quacunque curva praescripta moveri cogatur, quemadmodum in pendulis tum simpliciter suspensis, quibus corpus in linea circulari moveri cogitur apparet, tum iis, quæ intra cycloides suspendi solent, quibus corpus in cyclobide moveri cogitur; simidique modo effici potest ut corpus in data quaque curva incedere cogatur. Haec igitur est prima species motus non liberi, qui fit super data linea. Praeter eam autem alia species motus non liberi attendi meretur, in qua non ipsa quidem via, sed tantum superficies praescribitur, in qua corpus moveri cogitur; minus igitur haec motuum non liberorum species est restricta quam prior, cum in hac corpori adhuc libertas sit relicta sibi viam in data superficie sitam eligendi.

gendi. Hanc ob rem haec motus non liberi species ita tractari debet, ut primo linea in data superficie determinetur, quam corpus a potentiis et resistentia sollicitatum describet, deinde vero ut celeritas corporis in singulis huius lineae punctis definiatur, tertio denique ut etiam pressio, quam corpus in superficiem exercet, inuestigetur. Huiusmodi autem motus non liberi pariter ac priores pendulis quoque commode repraesentari possunt; corpus enim pendulum oblique impulsus, ut eius directio non sit in plano verticali, lineas curvas varii generis describet, quae autem omnes sunt in superficie sphaerica, cuius centrum in ipso suspensionis puncto extat. Inquisitio ideo huius motus hic redit, ut in superficie sphaerica primo linea quam corpus proiectum describet, determinetur, deinde vero celeritas in singulis locis, et tertio pressio, quam in superficiem exeret. Simili modo etiam perspicitur, effici posse, ut corpus pendulum non ad superficiem sphaericam, sed ad aliam quamque restringatur, dum scilicet circa punctum suspensionis superficies evoluta disponatur. Haec igitur est altera motuum non liberorum species, quae in motu super data superficie determinando occupatur; atque in his duabus motuum non liberorum speciebus indagandis totus hic Tomus secundus absolvitur. Quo ergo ad hanc tractationem, quae scitu necessaria sunt, praeparantur, in capite primo fundamenta et principia exposui, ex quibus, quae ad cognitionem utriusque speciei motuum non liberorum pertinent, deriuari queant. Demonstraui nimirum corpus a nullis potentiis sollicitatum tam super data linea, quam

super superficie motu aequabili moueri debere; in superficie autem fore viam a corpore descriptam ipsam lineam breuissimam quae in ea superficie duci potest. Deinde inuestigauī leges generales, quas quaeque potentiae atque etiam resistentia tum in accelerando vel retardando motum tum in pressione generanda obseruant. Ad haec etiam doctrina de vi centrifuga exponitur, quam corpora etiam a nullis potentiis sollicitata exercent, quaeque ex motu curuilineo, quo corpus incedere cogitur, ortum habet. In capitibus deinde secundo et tertio motus corporum super data linea tam in vacuo quam in medio resistente fuisse contemplor et examino. Primo nimirum motum determino, quo corpus a quibuscunque potentiis sollicitatum super data linea siue recta siue curua mouetur, siue descendendo siue ascendendo; atque si curua ita fuerit comparata ut tam ad descensus quam ascensus producendos sit idonea oscillationes quique definitio, easque inter se ratione temporum comparo; atque in hoc negotio indolem et proprietates oscillationum tam in circulo quam cycloide factarum definitio. Deinceps problemata tracto inuersa, quibus potissimum pro datis potentiis sollicitantibus in curuas inquirō, super quibus motus datam habeat proprietatem. Huc scilicet pertinent problemata de inueniendis curuis aequabilis descensus vel recessus a dato puncto, et huiusmodi plura, quae vel ab aliis iam sunt tractata, vel ad quae ipsum institutum perduxit. Inter haec prae ceteris eminent problemata de lineis brachystochronis et tautochronis, quorum utrumque ad ulteriorem quam
ad-

ad huc a quoquam est factum, perfectionis gradum euexi. Circa curuas enim brachystochronas errorem, qui a nonnullis tam in vacuo quam medio resistente erat commissus, correxi, et loco principii Hugeniani in se quidem veri, sed insufficientis, aliud latissime patens substitui, quo demonstraui in quocunque medio et potentiarum sollicitantium hypotbesi quacunque, eam perpetuo curuam esse brachystochronam, super qua corpus ita moueatur, ut tota pressio duplo sit maior quam vis centrifuga. Simili modo nouam atque genuinam curuas tautochronas inueniendi methodum trado, (quae enim ante sunt inuentae tautochronae nulla omnino methodo sed potius diuinatione sunt erutae) cuius ope non solum cycloidem iam dudum sub tautochronae nomine celebrem inueni, sed praeter eam innumerabiles alias curuas quaesito satisfaciennes elicui, inter quas adeo curuam algebraicam obseruaui; praeterea tam ex aliis agnatis quaestionibus in vacuo, quam ex integra huius negotii tractatione pro medio resistente, praestantiam et utilitatem huius methodi abunde intelligere licebit. Ceterum uti haec methodus instar speciminis tam Analyseos quam Mechanicae promotae est censenda, ita quoque passim in difficiliorum quorundam problematum solutionibus non contemnenda Analyseos subsidia apparebunt, quibus etiam haec scientia non parum promota esse videatur.

In quarto denique capite motum super data superficie persequor, quae doctrina, uti a nemine adhuc est tacta ita quoque tractatu est difficillima, propter naturam et proprietates soli-



solidorum nondum satis perspectas neque ad calculum reuocatas. Antequam igitur de huius modi motu quicquam statui potuerat, methodum exponere necesse erat, qua proprietates superficierum et linearum in iis ductarum erui atque calculo subiici possent. Hoc itaque praestiti ope aequationum tres quantitates variabiles continentium, quibus iam ante tum in Comment. Tomo III. ad lineam breuissimam super quavis superficie determinandam, tum in huius Tractatus Tomo praecedente ad motus liberos non in eodem plano factos inuestigandos sum usus. His denique praeparatis progredi liuit ad effectus potentiarum in corpora super superficiebus mota definiendos, ex quibus modum elicui tam viam a corpore descriptam quam reliqua motus symptomata inueniendi. Quum vero calculus, quamdiu in generalibus versamur, nimis fiat prolixus et tractatu difficilis; omissa resistentia omnia ad vacuum et grauitatem ordinariam reduxi, atque praecipue motum pendulorum oblique oscillantium sum perscrutatus, cuius motus anomalias et absidum progressionem diligenter determinavi. Haec igitur sunt, quae in isto tomo secundo sum complexus, quibus expeditis operam dabo, ut, quam primum liuerit motus corporum finitorum et primo quidem rigidorum, in ordinem reducam atque pari methodo exponam.

CAPVT



CAPUT PRIMUM.

DE MOTU NON LIBERO IN GENERE.

DEFINITIO I.

1.

COrpus non libere moueri dicitur, quando externa obstacula impediunt, quo minus iuxta eam directionem progredia-
tur, iuxta quam cum ratione motus in-
fuit, tum ratione potentiarum sollicitantium mo-
ueri deberet.

Scholion I.

2. In motu puncti libero, quem Parte pri-
ma exposuimus spatium, in quo corpus moueba-
tur, ab omnibus obstaculis vacuum assumimus,
nunc vero spatium ita comparatum ponemus, ut
corpori non liceat in quaque directione progre-
di, propter firmos parietes transitum non per-
mittentes.

Corollarium I.

3. Quando itaque corpus in motu suo obstaculum inuenit, ideoque eam directionem, secundum quam tendit, conseruare non potest; tum vel quiescere, vel in alia directione motum continuare debet.

Corollarium 2.

4. In quamquam autem directione corpus progrediatur post occursum obstaculi, ex circumstantiis tum motus tum positionis obstaculi iudicari debet.

Scholion 2.

5. Videtur haec doctrina ad motum corporum ex percussione pertinere, qua de re tamen hoc libro non agetur. Hoc vero libro alius generis obstacula assumimus, quae illam notitiam non requirunt. Sunt haec obstacula continua, quae motum puncti restringunt neque ullam reflexionem admittunt; cuiusmodi est tubus vel canalis siue rectus siue incurvatus, in quo corpusculum motum continuare debet. Hoc casu via penitus praescribitur, in qua corpus progredietur, neque propter tubi firmitatem inde egredi poterit. Quare cum hic loco corporis punctum consideremus, hac positione punctum in data linea moueri debet, neque ex ea excedere poterit.

Scholion 3.

6. Duas autem hoc libro pertractabimus motus impediti seu restricti species, quarum primae
mo-

DE MOTU NON LIBERO IN GENERE. 3

modo mentionem fecimus, quaeque complectitur motus punctorum super data linea siue recta siue curua. Altera species minus restringit motus libertatem, superficiem enim tantum praescribit, in qua corpus perpetuo versari debeat. Atque has duas motus impediti species isto libro sumus exposituri.

Corollarium 3.

7. Quae igitur in prima specie sunt inquirenda, sunt corporis seu potius puncti celeritas in quouis lineae praescriptae loco, pressio in hanc lineam, et tempus, quo punctum datam viae portionem percurrit.

Corollarium 4.

8. Circa motus alterius speciei autem praeter haec inueniri debet ipsa linea, quam corpus super superficie data describit. Quarum rerum fontes hoc primo capite aperiemus.

Scholion 4.

9. Hoc vero capite primum inuestigabimus motus vtriusque speciei, si corpus a nullis potentiis sollicitetur; vbi ostendimus, qua celeritate id progredi debeat, et quanta vi vbique tam lineam datam, quam superficiem datam premat. Sed si superficies tantum data fuerit, praeterea viam determinabimus in qua corpus mouebitur a nullis potentiis sollicitatum. Deinde vero principia exponemus, ex quibus iudicari licebit, quae mutationes a potentiis sollicitantibus tam absolutis quam rela-

tiuis oriantur, quo in sequentibus capitibus singula distincte deducere queamus.

Scholion 5.

10. In his autem motibus tam super lineis quam superficiebus datis, animum ab omni frictione abstrahimus, neque ullam motus retardationem ponemus. Quamobrem lineae et superficies, super quibus puncta moueri ponuntur, laeuissimae concipi debent et omni asperitate destitutae, ne motus retardationi propter eam sit obnoxius. Motum rotatorium quoque omnino ex animo profigari oportet, cum ex eo mutationes in motu oriantur, quae demum in sequentibus explicari possunt. Hanc ob rem punctum quasi rependo moueri concipiendum est, ut eius pars quaeque, si modo in puncto partes concipi possunt, eundem habeat motum.

Scholion 6.

11. Quae igitur in praecedente libro traditae sunt, et in hoc de motu punctorum tradentur, ad corpora finitae magnitudinis quoque accommodari possunt, si modo eorum motus sibi sit perpetuo parallelus, et omnes partes corporis aequali motu sint praeditae. Hoc vero ex sequentibus libris clarius apparebit, quibus casibus finitorum corporum motus a motu punctorum non discrepet. Quocirca in his libris ideo puncta tantum consideramus, quia ut partibus destituuntur, ita etiam in partibus diuersi motus inesse nequeunt.

PRO-

PROPOSITIO I.

Theorema.

12. *Corpus seu punctum, quod super linea data mouetur, et a nullis potentiis sollicitatur, perpetuo eandem celeritatem conseruabit: si modo illius lineae duae quaeque elementa contigua nusquam finitae magnitudinis angulum constituent.*

Demonstratio.

Quia corpus, dum in linea AM mouetur, a Tab. I.
 nulla potentia sollicitatur, neque frictioni ullus conceditur locus, motus corporis aliter variari nequit, Fig. 1.
 nisi quatenus linea AM impedit, quo minus corpus libere moueri possit; ex quo, quae celeritatis immutatio oriri debeat, inuestigandum est. Sit celeritas, quam corpus in M habet $= c$, hac igitur celeritate corpus, si libere moueretur, in tangente Mv progredieretur, quod vero, quia corpus curuam AM deserere non potest, fieri nequit: sed corpus cogitur per Mm progredi. Hanc ob causam concipiatur motus corporis secundum Mv , resolutus in motum per Mm et motum per Mn , existente Mmn parallelogrammo rectangulo. Perspicuum hic est motum per Mn , cuius directio est normalis in curuae elementum Mm , penitus absorberi, neque ullum effectum in celeritate immutanda habere posse. Corpus igitur altero motu progredietur in Mm , celeritate, quae est ad pristinam celeritatem ut Mm ad Mv : quare celeritas, qua corpus elementum Mm describit, erit $= \frac{Mm \cdot c}{Mv}$. Quoniam vero, Mvm est triangulum ad m rectangulum ideoque $Mm < Mv$, celeri-

tas haec minor erit quam prior c , atque celeritatis decrementum erit $= \frac{(Mv - Mm)c}{Mv}$. Ad huius valorem inueniendum fit MO radius osculi curuae in $M = r$ et elementum $Mm = ds$; eritque, ob ang. $O = \text{ang. } m M v$,

$MO: Mm = Mm: mv$, ex quo prodit $mv = \frac{ds^2}{r}$, atque $Mv = \sqrt{(ds^2 + \frac{ds^4}{r^2})} = \frac{ds}{r} \sqrt{r^2 + ds^2} = ds + \frac{ds^2}{2r^2}$. Ex hoc iam obtinebitur decrementum celeritatis, dum corpus curuae elementum ds percurrit

$= \frac{cds^2}{2r^2}$, cuius integrale dabit decrementum celeritatis, dum corpus finitam curuae AM portionem percurrit. At expressio $\frac{cds^2}{2rr}$ aequiualeat differentiali secundi gradus; eius ergo integrale erit differentiale primi gradus. Quamobrem decrementum celeritatis postquam corpus quantumuis arcum curuae datae percurrit, erit infinite paruum, atque corpus motu uniformi feretur per totam curuam AM , si modo radius osculi r nusquam fuerit infinite paruus. Q. E. D.

Corollarium I.

13. In omni igitur curua, in qua radius osculi nusquam est infinite paruus, corpus mouebitur vniformiter, siquidem a nullis potentiis sollicitatur; neque frictionem patitur.

Corollarium 2.

14. Si radius osculi est infinite paruus, tum $\frac{cds^2}{2r^2}$ vel est quantitas finita vel differentiale primi gradus.

Illo

Illo casu corpus finitum celeritatis gradum amittet, hoc vero tantum infinite paruum.

Corollarium 3.

15. Cum autem istius modi puncta in omnibus curuis sint rara et a se inuicem dissita, corpus tamen arcum inter duo talia puncta interceptum motu vniformi percurrent.

Scholion 1.

16. Casus, quibus corpus celeritatis finitum decrementum subito patitur, alii non esse possunt, nisi vbi curua habet cuspides. His enim in locis corpus directe reverti cogitur, et normaliter in punctum cuspidis impingit. Tunc igitur corpus non solum finitum celeritatis gradum amittet, sed omnino omnem motum amittere debet; nisi forte corpus ponatur elasticum, quo casu eadem celeritate, qua incurrit, reflectetur, atque ita motum vniformem conseruabit. In cuspidis enim duo elementa angulum infinite acutum constituunt.

Scholion 2.

17. Praeter cuspides vero alia dari possunt in curuis puncta, in quibus radius curvedinis est infinite paruum; quia vero duo quaeque elementa contigua fere in directum sunt posita, et angulus deinceps positus est infinite paruum fieri non potest, vt ex demonstratione apparet, vt corpus finitum celeritatis decrementum patiatur. Quamobrem cum istiusmodi puncta sint rara, corpus nihilominus motu aequabili mouebitur.

Co-

Corollarium 4.

18. Si igitur corpus motum fuerit elasticum, in quacunque curua semper motu aequabili feretur: at si non sit elasticum, cuspides tantum motum turbabunt, dum eum prorsus tollunt.

Scholion 3.

Tabula I.

Fig. 2.

19. Vt haec clarius percipiantur, sint duo curuae elementa AB, BC, et anguli ABC quem constituent, deinceps positus CBD infinite parvus, cuius sinus sit dz posito sinu toto $= 1$. Quia corpus postquam elementum AB descripsit vi insita in BD progredi conatur celeritate priore, quae sit c ; eius motus duplex concipiatur, alter in directione BC, alter in directione ad BC normali, qui in effectum duci non potest. Demisso igitur ex D in BC perpendicularo DC, corpus altero motu per BC mouebitur celeritate, quae est ad priorem vt BC ad BD, i. e. vt $\sqrt{1 - dz^2}$ ad 1. Per BC idcirco habebit celeritatem $= c \sqrt{1 - dz^2}$ seu $c - \frac{cdz^2}{2}$; quare celeritatis decrementum erit $\frac{cdz^2}{2}$, quod aequiualeat differentiali secundi gradus. Ex quo intelligitur, quamdiu in quaque curua angulus CBD fuerit infinite parvus, corpus motu aequabili esse progressurum. At in omni curua angulus vel est infinite parvus, vel angulus ABC ipse, quod in cuspidibus accidit. Consequenter cuspides tantum motus uniformitatem perturbant, nisi corpus fuerit elasticum, quo casu nihilominus motus uniformitas conseruatur.

PRO-

PROPOSITIO 2.

Theorema.

20. Dum corpus motu uniformi in curua **AM** Tabula II
Fig. 20 mouetur, in singulis punctis **M** premet curuam normaliter vi, quae est ad corporis vim grauitatis, vt altitudo eius celeritati debita ad dimidium radium osculi.

Demonstratio.

Si corpus in curua **AM** libere moueri deberet motu aequabili; tum vbique vim adesse deberet normalem corpus secundum **MO** trahentem tantam, quae se haberet ad corporis grauitatem, vt altitudo celeritati corporis debita ad dimidium radium osculi **MO**, vt ex demonstratis Libri praeced. apparet. Nisi enim talis vis adesset, corpus in linea recta progredieretur. Hoc autem casu canalis **AM** in quo corpus inclusum concipitur, impedit, quo minus corpus in recta progrediatur. Quamobrem corpus tanta vi canalem normaliter premet, secundum directionem **Mn**. Si enim talis vis normalis adesset, corpus in canali **A M** libere moueretur, neque illum premeret; hac vero vi absente, vt hic ponimus, necesse est vt corpus ipsum canalem tanta vi premat. Q. E. D.

Corollarium I.

21. Si igitur altitudo celeritati corporis debita ponatur v et radius osculi $MO = r$, atque grauitas corporis $= 1$, quam scilicet haberet, si in superficie terrae esset positum; erit vis, qua

Tom. II.

B

cor-

corpus canalem in M secundum Mn premit = $\frac{2v}{r}$.

Corollarium 2.

22. Si corpus maiore vel minore celeritate moueretur in curva AM , tum pressio in M maior vel minor esset in duplicata celeritatis ratione, quia altitudo v quadrato celeritatis est proportionalis.

Corollarium 3.

23. Directio huius pressionis est normalis in curuam, et directe contraria est positioni radii osculi MO . Quare radius osculi in alteram curuae partem productus dabit directionem huius pressionis.

Corollarium 4.

24. Si corpus in linea recta mouetur; hæc pressio erit nulla, ob radium osculi infinitum. Hoc quoque ex ipsa motus natura perspicuum est. Corpus enim motum in recta vniformiter sponte progreditur, et hanc ob rem canalem rectum non premit.

Corollarium 5.

25. Si curua AM fuerit circulus, pressio vbi-que erit eadem. Eo vero maior erit quo minor est radius circuli. Existente enim celeritate eadem, pressio erit reciproce vt radius circuli.

Scholion I.

26. Quo corpus in curua AM libere moueri pos-

DE MOTV NON LIBERO IN GENERE. II.

possit vniformiter, necesse est vt secundum normalem MO trahatur $vi = \frac{2v}{r}$. Ex quo intelligi licet, corpus tanta vi in plagam oppositam niti, alioquin enim illa vi non esset opus ad corpus in curua conservandum. Dum igitur corpus in canali AM moueri cogitur, neque eius nifus a vi normali tollitur, hunc nifum re ipsa in canalem exercebit. Quamobrem talis canalis tantam firmitatem habere debebit, vt hanc pressionem sustinere queat.

Corollarium 6.

27. Apparet igitur corpus motum sine vllo celeritatis dispendio effectum edere posse, qui scilicet consistit in pressione definita.

Corollarium 7.

28. Ex motu ergo solo pressio oriri potest. Quamobrem uti ex pressione seu a potentiis motus generatur, ita quoque ex motu pressio oriri potest.

Scholion 2.

29. Intelligitur hinc, quod iam supra innuimus Libro primo, incertum esse, vtum motus potentiis debeatur, an vero potentiae motui. Videmus enim in mundo vtrumque potentias nempe et motum existere; vtrum igitur alterius sit causa, quaestio est tum ex ratione tum ex observationibus decidenda. Rationi quidem minime consentaneum videtur corporibus conatus insitos tribuere, multo minus potentias per se existentes statuere. Praeterea vero is phaenomenorum cau-

fas genuinas dedisse censendus est, qui omnia a motu orta demonstraerit. Motum enim semel existentem perpetuo conseruari debere clare ostendimus supra; hic vero, quemadmodum ex motu potentiae oriantur exposuimus. Quemadmodum vero potentiae sine motu vel existere vel conseruari queant, concipi non potest. Quamobrem concludimus omnes potentias, quae in mundo conspiciuntur, a motu provenire; atque diligenti scrutatori incumbit inuestigare ex quonam, quorumque corporum motu quaelibet potentia in mundo obseruata ortum suum habeat.

Scholion 3.

30. Cum difficile intellectu sit, quomodo talis effectus, pressio scilicet continua, a corpore moto, sine ullo celeritatis dispendio, oriatur; operae pretium erit in huius rei causam inquirere. Vidimus in praecedente propositione motum corporis in curua linea non absolute aequabilem esse, sed celeritatem reuera decrementum pati, dum corpus per singula elementa curuae mouetur. Haec vero decrementsa differentialibus secundi gradus aequivalent, vt etiam infinities repetita celeritatem corporis infinite parum tantum minuere queant. Huic igitur infinite paruo celeritatis decremento pressionem adscribi debere indico; in hacque sententia eo magis confirmor, quod, quo maius sit hoc celeritatis decrementum, eo maior quoque existat pressio. Cum pressio in M sit $\frac{2v}{r}$, hacque vi totum elementum Mm , dum percurritur
pre-

DE MOTU NON LIBERO IN GENERE. 11

prematur, licebit huius pressionis effectum in Mm $= ds$ exponere per $\frac{2v ds}{r}$. Supra vero decrementum celeritatis, dum corpus elementum Mm percurrit, inuentum est $\frac{cds^2}{2r^2}$ (12). Quod autem ibi erat c hic nobis est \sqrt{v} , ergo cum esset $-dc = \frac{cds^2}{2r^2}$ erit $-\frac{dv}{2\sqrt{v}} = \frac{ds}{2r^2} \sqrt{v}$ seu $-dv = \frac{v ds^2}{r^2}$. Habebitur ergo $-4v dv = \frac{4v ds^2}{r^2} =$ quadrato pressionis quam sustinet elementum Mm .

Corollarium 8.

31. Quadratum pressionis ergo in Mm exercitae aequiualeat decremento ipsius $2v^2$. Atque si hoc decrementum aequale fuerit ipsi ds^2 , tum pressio aequalis est vi grauitatis, ex quo comparatio harum pressionum cognoscitur.

Corollarium 9.

32. His ergo concessis, istud infinitesimale paruum celeritatis decrementum sufficit ad pressionem finitam producendam. Quamdiu enim ipsius v^2 decrementum homogeneum est ipsi ds^2 , pressio est finita, sin vero id decrementum infinites maius existeret quam ds^2 , pressio quoque foret infinite magna.

DEFINITIO 2.

33. Pressio haec, quam corpus in linea curua motum exercet in hanc lineam, vocatur vis centrifuga; eo quod eius directio a centro circuli osculatoris O tendit.

Co-

Corollarium I.

34. Vis centrifuga ergo est ad vim gravitatis, ut altitudo celeritati debita ad dimidium radium osculi.

Corollarium 2.

35. Quando ergo corpus in linea curua moveri cogitur, hanc curuam vi centrifuga premit, etiam si a nulla potentia sollicitetur.

Scholion.

36. Quando vero corpus a potentiis quoque sollicitatur, pressio quoque in canalem ab his potentiis oriatur, tumque canalus duplici ratione premetur, partim nempe a potentiis partim a vi centrifuga. Nunc igitur quid potentiae in corpus non libere motum valeant, inuestigandum est.

PROPOSITIO 3.

Theorema.

Tabula I.
Fig. 3.

37. Si corpus, quod in canali AM movetur, sollicitetur in M a potentia MN , cuius directio normalis est in curuam AM , celeritas neque augebitur neque minuetur: sed tota potentia in premendo canali consumetur.

Demonstratio.

Ex priore libro manifestum est potentiam, cuius directio in directionem motus sit normalis, celeritatem neque augere neque minuere. Quamquam hoc enim ibi de motu libero est demonstratum, hic tamen eodem rigore locum habet, cum po-

potentia normalis corpus neque in consequentia neque in antecedentia trahat. In motu libero vero potentia normalis directionem corporis immutat, quem effectum hoc loco habere non potest. Hac igitur vi apprimetur corpus ad canalem, et consequenter tanta vi canalem premet in directione M N. Q. E. D.

Corollarium 1.

38. Directio igitur talis vis normalis vel incidit in directionem vis centrifugae vel ei directe est contraria. Illo casu auget vim centrifugam hoc casu minuit.

Corollarium 2.

39. Quia directio vis centrifugae in convexam curvae partem incidit, eius effectus augebitur, si normalis vis directio in eandem plagam incidit: at si normalis vis in concavam partem dirigitur minuetur effectus.

Corollarium 3.

40. Si vis normalis fuerit $= N$, et vis centrifuga ut ante $= \frac{2v}{r}$; premetur curva vel vi $\frac{2v}{r} + N$, si hae vires fuerint conspirantes, vel vi $\frac{2v}{r} - N$ si fuerint contrariae.

Corollarium 4.

41. Si vis normalis fuerit aequalis et contraria vi centrifugae, curva nullam pressionem sustinebit; seu corpus ex ea egredi non conabitur. Hoc ergo casu eandem curvam corpus libere describeret; id

id quod perspicuum quoque est ex vi normali, quae tum est $\frac{2v}{r}$: hac enim efficitur, ut corpus aequabiliter in quacunque curua libere moueatur.

PROPOSITIO 4.

Theorema.

Tabula I.
Fig. 3.

42. Si corpus quod in canali AM mouetur, in M sollicitetur a potentia, cuius directio sit secundum tangentem MT : huius effectus in hoc consistet, ut celeritatem corporis vel augeat, vel diminuat, eodem modo, quo in motu libero.

Demonstratio.

Quia huius potentiae directio est ipsa canalis tangens MT , canalis effectum huius potentiae impedire non potest; neque etiam in canalem haec potentia ullum effectum exerere poterit. Quamobrem augebit haec potentia vel diminuet, celeritatem corporis, prout eius directio directioni corporis vel conspirans vel contraria fuerit, prorsus ac si corpus libere moueretur. Atque posita altitudine celeritati in M debita $= v$, elemento $Mm = ds$, et vi $MT = T$, erit $dv = Tds$, accelerante potentia T : at retardante ea, erit $dv = -Tds$. Q. E. D.

Corollarium I.

43. In motu corporum igitur super lineis datis vis normalis pressionem tantum generat in eas, vis tangentialis vero celeritatem tantum afficit.

Corollarium 2.

44. Cum vis resistentiae effectum vis tangentialis

tialis retardantis praestet, eodem quoque modo agat in motum corporum super datis lineis, ac in motum liberum. Si igitur praeter vim tangentialem accelerantem T affuerit resistentia R , prohibet ex ambabus coniunctim $dv = T ds - R ds$.

PROPOSITIO 5.

Problema.

45. Si corpus super linea data AM moueatur in medio quocunque resistente, et insuper sollicitetur a potentia absoluta, cuius directio sit MP ; determinare effectum tam potentiae absolutae, quam resistentiae, nec non pressionem, quam curua AM sustinet.

Tabula I.
Fig. 4.

Solutio.

Sit altitudo celeritati in M debita $= v$, vis resistentiae $= R$, et vis absoluta $MP = P$: cuius directio sit talis, vt sumto elemento $Mm = ds$ sit perpendicularum mn ex m in MP demissum $= dx$ et $Mn = dy = \sqrt{ds^2 - dx^2}$. Resoluatur potentia P in has duas secundum MN normalem in curuam et MT tangentem trahentes, erit ob triangu-
gula MPT et Mmn similia, vis normalis MN seu $PT = \frac{P dx}{ds}$, et vis tangentialis $MT = \frac{P dy}{ds}$ celeritatem augens. Quia vero vis resistentiae celeritatem minuit, augebitur celeritas tantum ab excessu $\frac{P dy}{ds} - R$, hanc ob rem erit $dv = P dy - R ds$ (42).
Normalis vis $\frac{P dx}{ds}$ vero efficit, vt curua in M tantundem prematur secundum directionem MN , ad convexam curuae partem sitam. Quare cum vis centrifuga in eandem plagam vrgeat, quae est $=$
Tom. II. C $\frac{v^2}{r}$

$\frac{2v}{r}$, designante r radium osculi in M ; erit vis totalis, qua curua in M secundum MN premitur $= \frac{p dx}{ds} + \frac{2v}{r}$. Vnde tum motus corporis super curua, tum curuae pressio in singulis punctis innotescit. Q. E. I.

Corollarium I.

46. Ex his duabus formulis igitur accelerationem et pressionem exprimentibus omnia deduci possunt, quae ad motum super lineis datis pertinent.

Scholion I.

47. Hic quidem vnicam potentiam absolutam posuimus; nihilominus tamen satis ex eo intelligitur, quomodo plurium potentiarum effectus fit determinandus. Scilicet quemadmodum in motu libero fecimus, ita etiam hic singulae potentiae in binas normalem nempe et tangentialem sunt resoluendae, ex quibus colligendis vna vis normalis vnaque tangentialis oritur: quarum effectus per propositiones 3. et 4. determinari poterunt.

Scholion 2.

48. Haecenus igitur fundamenta exposuimus, ex quibus in sequentibus motum corporum super lineis datis determinare licebit. Antequam autem pro motu super superficiebus datis similia principia tradamus, expedit vt paucis ostendamus, quo modo motus super linea data in effectum deduci possit. Namque ope canalıs, in quo corpus contineatur, talis motus minime produci pote-

poterit, propter frictionem aliaque obstacula, quae tolli neutiquam possunt. Commodissime autem huiusmodi motus non liberi efficiuntur pendulorum ope, vti primum a Hugenio factum est; quamobrem hanc pendulorum ad institutum nostrum accommodationem sequenti propositione explicabimus.

PROPOSITIO 6.

Problema.

49. *Ope penduli efficere ut corpus in data linea moueatur.*

Tab. I.
Fig. 5.

Constructio.

Sit A M B curua proposita in qua corpus moueri debeat; huius curuae construatur euoluta AOC, laminaque secundum eius figuram incuruerur et firmetur. Tum filum huic laminae circumducatur, quod altero termino ad laminam sit affixum, altero vero termino in A annexum habeat corpus mouendum. Quando igitur corpus moueri incipit, perspicuum est id in curua AMB moueri debere, quia filum dum a lamina separatur hanc curuam euolutione describit. Q.E.Fac.

Corollarium I.

50. Hac igitur ratione corpus in data curua progreditur, atque frictionibus non est obnoxium. Quare tali motu commodissime per experimenta effici poterunt, quae in theoria inveniuntur.

C₂

Co-

Corollarium 2.

51. Ex doctrina de evolutionibus intelligitur fili partem MO a lamina separatam, in curuam AMB esse normalem ipsumque eius radium osculi.

Corollarium 3.

Tabula I.
Fig. 6.

52. Quo corpus in peripheria circuli AMB moueatur, lamina incuruata non est opus, sed filum altero termino C tantummodo in centro C peripheriae est figendum.

Corollarium 4.

Fig. 5.

53. Quia filum MO est radius osculi, vis centrifuga tota ad tendendum hoc filum impendetur. Quare hoc filum tum satis roboris habere, tum extensioni obnoxium non esse debet. Nisi enim eandem perpetuo longitudinem conseruet, curuam desideratam non describet.

Corollarium 5.

54. Accedente potentia absoluta, habebitur praeter vim centrifugam vis normalis, quae filum quoque tendet, si vi centrifugae fuerit conspirans. At si contraria fuerit minuet tensionem filii, imo etiam si maior fuerit, comprimet, quo casu euolutio nullius erit usus. Nam cum filum debeat esse flexile, compressioni resistere non poterit, neque ideo impedire, quo minus corpus a curua AMB versus euolutam recedat.

Scholion I.

55. Praeter hanc difficultatem, ista curuarum per evolutiones generatio hoc quoque laborat

borat defectu, quod linea recta produci nequeat; ad eam enim generandam filum requireretur infinite longum. Simili modo haec euolutio ad curuas accommodari non potest, quae alicubi radium osculi habent infinite magnum. Deinde etiam neque cuspide neque flexu contrario praeditae curvae hoc modo describi possunt. Quamobrem ita praxis locum tantum habet in curuis ubique finitam curuaturam habentibus, ad quod addi debet, ut pressio curvae totalis nusquam in curvae concavam partem dirigatur.

Scholion 2.

56. Hugenus, qui primus euolutionis doctrinam excoluit, statim eam ad hunc ipsum usum adhibuit; uti ex eius egregio opere de horologio oscillatorio apparet. Cum enim inuenisset oscillationes super cycloide omnes esse isochronas, motum super cycloide in horologia inferre volebat, quod per pendulum intra cycloides oscillans effecit. Cum enim cycloidis euoluta sit cyclois, hac ratione obtinuit, ut corpus filo annexum in cycloide moueretur.

Scholion 3.

57. In hoc autem pendulorum motu maxime notari conuenit, praeter corpus motum filum quoque moueri debere, id quod ad institutum huius libri, in quo de motu puncti tantum agetur, minime pertinet. Praeterea motus corporis pendulo annexi non est sibi parallelus, sed circularis circa centrum scilicet circuli curuam osculantis, qui motus pariter hoc loco non attingitur.

gitur. Hoc igitur libro motum puncti duntaxat super linea vel superficie data examini subiiciemus, mentemque tam a motu fili, quam a motu circulari abstrahemus. In sequentibus autem motum pendulorum, ubi et motus fili et motus circularis in computum ducetur, ad motum puncti tantum reducemus, ita ut haec, quae hoc libro tractabuntur, nihilominus in praxi usum sint habitura. Quamobrem, ut iam monuimus, punctum motu sibi semper parallelo super curua seu superficie sine vlla frictione ferri est concipiendum.

PROPOSITIO 7.

Theorema.

Tabula II.
Fig. 2.

58. *Si corpus a nullis potentiis sollicitatum moueatur in vacuo seu medio non resistente super superficie quacunque ABC: motu feretur uniformi animus ab omni frictione abstrahendo.*

Demonstratio.

Cum corpus super linea data motum impressum continuare queat, multo magis super superficie data moueri poterit, eo quod eius libertas minus est restricta. Sit igitur DMm linea, in qua corpus progreditur; haec erit vel recta vel curua. Si ista linea fuerit recta dubium non est, quin corpus motu aequabili sit profecturum. Sin autem fuerit curua, quae aequatione exprimi potest, duo quaeque eius elementa contigua vel proxime in directum erunt sita, vel
an-

angulum infinite acutum constituent, quod in cuspidibus accidit. Illo casu supra demonstratum est corpus nullum motus decrementum pati (12). In cuspidibus vero corpus quidem omnem motum amittet, nisi fuerit elasticum. Quamobrem si motus tantum fiat in curua vel parte curuae cuspidibus carente motus corporis erit aequabilis. Q. E. D.

Corollarium I.

59. Patiatur quidem corpus celeritatis decrementum, quoties directionem mutare cogitur, hoc vero differentiali secundi gradus aequiualeat, ideoque, etiamsi integretur, decrementum tamen infinite paruum producit.

Corollarium 2.

60. Si scilicet corporis celeritas fuerit c et radius osculi $MO = r$, erit decrementum celeritatis, dum corpus elementum ds percurrit =

$$\frac{c ds^2}{2 r^2} (12).$$

Scholion.

61. Demonstratio huius propositionis prorsus congruit cum demonstratione primae propositionis, neque aliud est discrimen, nisi quod corpus illo casu in data linea moueri cogatur, hoc vero casu super superficie data viae quaerendae habeat libertatem. Quamobrem omnes annotationes, quae circa primam propositionem sunt factae hic quoque valent. Videbimus ergo, quam-

quamnam viam, corpus in superficie quacunque motum percurrere debeat.

PROPOSITIO 8.

Theorema.

Tabula II.
Fig. 1.

62. *Via DMm , quam corpus super superficie quacunque ABC motum describit, est linea breuissima, quae inter terminos D et M duci potest; si scilicet corpus in vacuo moueatur, et a nullis potentiis sollicitetur.*

Demonstratio.

Descripserit corpus iam curuam DM ; manifestum est corpus ex M in tangente Mn esse progressurum, nisi in superficiei perseuerare cogeretur. Quia igitur motus per Mn fieri non potest, resoluatur is in duos laterales, quorum alter in ipsa superficie sit dispositus, alterius vero directio in superficiem sit perpedicularis, atque ideo penitus non in effectum deduci possit. Hanc ob rem ex n in superficiem demittatur perpendiculum nm , erit recta Mm elementum, in quo corpus ex M progredietur. Planum ergo nMm , in quo posita sunt et elementum mM , et id quod a corpore immediate ante est descriptum, erit normale in superficiem. At linea breuissima in quavis superficie ducta hanc habet proprietatem, ut planum, in quo posita sunt duo quaeque elementa contigua, sit in superficiem normale. Quamobrem linea DMm , quae a corpore describitur, est linea breuissima in superficie ABC . Q.E.D.

Co-

Corollarium I.

63. Si ergo ex puncto A, in quo motus incipit, linea breuissima in superficie ABC secundum directionem motus ducatur, habebitur via, qua corpus motu vniformi mouebitur.

Corollarium 2.

64. Quia filum tensum in superficie lineam breuissimam designat, ostendet filum tensum simul viam, in qua corpus super ea superficie mouetur.

Corollarium 3.

65. Si igitur superficies proposita fuerit plana, corpus lineam rectam describet, quia haec in plano est linea breuissima. Atque in superficie sphaerica corpus in circulo maximo mouebitur.

Corollarium 4.

66. Quia planum, in quo posita sunt duo curuae D Mm elementa contigua, normale est in superficiem, radius osculi curuae vero in eodem plano sit positus et in curuam normalis; erit radius osculi curuae descriptae MO normalis in superficiem.

Scholion.

67. Quemadmodum in quauis superficie linea breuissima sit inuenienda a me primum ostensum est in Tomo III. Comment. Acad. Imp. Petrop. Cum autem ibi ex alio principio lineam breuissi-

Tom. II.

D

mam

mam determinauerim, atque haec materia elementis nondum sit inserta, sequenti propositione lineam hanc breuissimam seu eam, quae a corpore describitur, determinare constitui.

PROPOSITIO 9.

Problema

Tabula II.
Fig. 2.

68. *In superficie quacunq̃ue determinare lineam, quam corpus a nullis potentiis sollicitatum, quod super ea mouetur, describit.*

Solutio.

Ad naturam superficiei propositae exprimendam sumatur pro arbitrio planum APQ fixum in eoque recta AP pro axe. Tum ex quouis superficiei puncto M demittatur in hoc planum perpendiculum MQ , et ex Q in axem AP perpendicularis QP . Positis nunc $AP = x$, $PQ = y$, et $QM = z$, natura superficiei dabitur per aequationem inter has tres variables x , y et z et constantes. Sit huius aequationis differentialis $dz = Pdx + Qdy$, ex qua linea breuissima in hac superficie seu linea, quam corpus describit, determinari debet. Haec linea vero ex hoc determinatur, quod eius radius osculi in ipsam superficiei normalem incidat. Quamobrem primo normalem superficiei, et deinde cuiusque in ea ductae curuae radium osculi determinabimus; quo postmodum ex coincidentia harum linearum natura lineae quaesitae posset concludi.

Ad

DEMOTV NON LIBERO IN GENERE. 27

Ad normalem in superficiem inueniendam secetur primo superficies plano MQB , existente BQ recta in plano APQ parallela axi AP , prodeatque ex hac sectione curua BM ; cuius natura exprimetur hac aequatione $dz = Pdx$, quae ex locali pro superficie $dz = Pdx + Qdy$ oritur, posita y constante seu $dy = 0$. Ducatur ad hanc curuam BM normalis ME rectae BQ productae in E occurrens, erit subnormalis $QE = \frac{zdz}{dx} = Pz$. Ducta nunc EN perpendiculari ad BE , quaevis recta MN a M ad NE ducta normalis erit in curuam BM . Simili modo superficies secetur plano PQM prodeatque sectio CM , cuius natura exprimetur aequatione inter z et y manente x constante, quae erit $dz = Qdy$. Sit MF normalis in hanc curuam erit subnormalis $QF = \frac{-zdz}{dy} = -Qz$, signo negatiuo vtor, quia subnormalem QF versus P cadere pono. Ducta nunc recta FN parallela axi AP , quaevis recta ex M ad FN ducta normalis erit in curuam CM . Recta MN ergo, quae in punctum intersectionis N rectarum FN et EN cadit, perpendicularis in vtramque curuam BM et CM , et hanc ob rem perpendicularis erit in superficiem. Locus ergo normalis inuenitur sumendo $AH = x + Pz$, et $HN = -Qz - y$.

Ad determinandam vero radii osculi cuiusvis curuae in superficie data ductae positionem sint duo curuae elementa Mm et $m\mu$, quibus respondeant in plano APQ elementa Qq , qz , atque in axe AP assumto elementa Pp , $p\pi$, quae sint aequalia.

Tabula II.
Fig. 3.

lia. Erit ergo $Pp = p\pi = dx$; $pq = y + dy$; $p\varrho = y + 2dy + ddy$; $Qq = \sqrt{dx^2 + dy^2}$; $q\varrho = \sqrt{dx^2 + dy^2} + \frac{dy ddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$; $qm = z + dz$; $q\mu = z + 2dz + ddz$; $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, et $m\mu = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} + \frac{dy ddy + dz ddz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}$.

Producantur Qq et Mm vtrisque, quarum illa ipsi $\pi\varrho$ in r , haec vero ipsi rn normali in planum APQ in n occurrat; eritque ob $Pp = p\pi$, $qr = Qq$ et $mn = Mm$, atque $\pi r = y + 2dy$, ac $rn = z + 2dz$. Iam ad elementum Mm ducatur in plano Qm normalis mS occurrens ipsi Qq productae in S , erit $QS = \frac{(qm - QM) QM}{Qq} = \frac{z dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$. Ducta iam SR in plano APQ perpendiculari ad QS , omnes rectae ex m ad SR ductae normales erunt ad elementum Mm . In his igitur normalibus erit radius osculi curvae $Mm\mu$. Ea vero harum normalium congruet cum radio osculi, quae in eo sita erit plano, in quo posita sunt elementa Mm et $m\mu$. Quamobrem hoc planum determinari oportet. In hoc vero plano sunt elementa mn et $n\mu$, ambo itaque usque ad planum APQ producta dabunt intersectionem illius plani cum plano APQ . At nm vel mM occurrit plano APQ in T , ubi cum elemento Qq producto concurrir. Est igitur $QT = \frac{z\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dz}$. Ipsi $n\mu$ parallela MV in plano $m\mu$ erit sita, haec vero MV in planum APQ incidet in V , dabiturque QV ex analogia hac $(rn - r\mu)$:

$rg = QM: QV$; erit itaque $QV = \frac{zddy}{ddz}$. Hanc ob rem recta TV producta erit intersectio plani nmp cum plano APQ; quare recta ME, quae in concursum rectarum SR & TV est ducta, erit simul normalis in Mm et posita in plano nmp ; eritque propterea MR positio radii osculi curvae in M. Ex his punctum R hoc modo determinabitur; erit, ducta RX perpendiculari in AP productam, $AX = \frac{zdx(dyddy + dzddz)}{(dx^2 + dy^2)ddz - dydzddy} + x$ atque $XR = \frac{zdxddy + zdz(dzddy - dyddz)}{(dx^2 + dy^2)ddz - dydzddy} - y$. Quo igitur normalis in superficiem MN in radii osculi curvae directionem incidat, debet esse $AH = AX$ et $XR = HN$; vnde erit $P(dx^2 + dy^2)ddz - Pdydzddy = dxddy + dx dzddz$ et $-Q(dx^2 + dy^2)ddz + Qdydzddy = dx^2ddy + dz^2ddy - dzdyddz$. Quæ quidem aequationes inter se congruunt, fiet enim ex iis coniunctim $Pdx + Qdy = dz$, quae est ipsa aequatio naturam superficiei exprensens. Harum igitur aequationum alterutra cum hac $dz = Pdx + Qdy$ coniuncta dabit curuam a corpore in proposita superficie percursum. Q.E.I.

Tabula II.
 Fig. 2. & 3

Corollarium I.

95. Erit igitur pro linea in superficie proposita descripta $ddz: ddy = Pdydz + dx dy: Pdx^2 + Pdy^2 - dx dz$. At quia est $dz = Pdx + Qdy$ erit $ddz: ddy = Pd z + dx: Pdy - Qdx$, seu $Pdyddz - Qdxddz = Pd z ddy + dxddy$.

Corollarium 2.

70. Si assumatur altera aequatio et vtrinque subtrahatur $Q dz^2 ddz - dy^2 ddy$ habebitur $-Q(dx^2 + dy^2 + dz^2) ddz + Q dy dz ddy + dy^2 ddy = (dx^2 + dy^2 + dz^2) ddy - Q dz^2 ddz - dz dy ddz$. Vnde habetur $\frac{ddy + Q ddz}{dy + Q dz} = \frac{dy ddy + dz ddz}{dx^2 + dy^2 + dz^2}$. Quae est illa ipsa aequatio, quam pro linea breuissima in quacunque superficie dedi in Comm. Acad. Petr. Tom. III.

Scholion I.

Tabula III.
Fig. I.

71. Vt in hoc casu quo corpus a nulla potentia sollicitatur, directio radii osculi cum normali in superficiem congruere debet, ita in aliis casibus, quando corpus sollicitatur a potentiis, hae lineae datum angulum constituere debent. Quamobrem ad hunc angulum generaliter inueniendum fit MN normalis in superficiem, et MR directio radii osculi; erit, vt iam vel posuimus vel inuenimus, $PQ = y$, $QM = z$; $PH = bN = Pz$; $Qb = -Qz$; $PX = R x = \frac{z dx (dy ddy + dz ddz)}{(dx^2 + dy^2) ddz - dy dz ddy}$,

et $Qx = \frac{z dx^2 ddy + x dz (dz ddy - dy ddz)}{(dx^2 + dy^2) ddz - dy dz ddy}$. Dueta

NR ex N in MR demittatur perpendicularum NO,

erit $MO = \frac{MR^2 + MN^2 - NR^2}{2MR} = \frac{MQ^2 + Rx \cdot Nb + Qx \cdot Qb}{MR}$ et

$NO = \frac{\sqrt{MR^2 MN^2 - (MQ^2 + Rx \cdot Nb + Qx \cdot Qb)^2}}{MR} = \sqrt{MQ^2}$

DE MOTU NON LIBERO IN GENERE. 31

$$\frac{\sqrt{MQ^2(Qx-Qb)^2+MQ^2(Rx-Nb^2)}+(Rx-Qb-Qx.Nb)^2}{MR}.$$

Anguli vero RMN tangens est $= \frac{NO}{MO}$ posito finu toto $= 1$. Substitutis autem supra assumtis symbolis et in subsidium vocata aequatione $dz = Pdx + Qdy$ prodibit tangens anguli NMR $= \frac{ddy(dx+Pdz)-ddz(Pdy-Qdx)}{(ddx-Qddy)\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$. Hoc ergo angulo euanescente fit $ddz: ddy = Pdz + dx: Pdy - Qdx$ ut supra (69).

Scholion 2.

72. Ipsa vero radii osculi longitudo MO inuenitur ex angul nmp ope huius analogiae ut finus anguli nmp ad finum totum ita Mm ad MO. Est vero $n\mu = \sqrt{(ddy^2 + ddz^2)}$ et $mn-$

Tabula II.
Fig. 3.

$m\mu = \frac{-dy ddy - dz ddz}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$, ergo perpendicularum ex

n in $m\mu$ productum $= \frac{\sqrt{(dx^2 ddy^2 + dz^2 ddy^2 + dx^2 ddz^2 + dy^2 ddz^2 - 2 dy dz ddy ddz)}}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$. Quare hoc perpendicularum

est ad $\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$ ut $\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$ ad MO, vnde prodit radius osculi MO $=$

$\frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(dx^2(ddy^2 + ddz^2) + (dy ddz - dz ddy)^2)}}$. Hoc autem ra-

dio osculi opus erit in sequente propositione, in qua pressionem, quam corpus in superficiem exercet, inuestigabimus.

Scho-

Scholion 3.

73. Ex hac generali radii osculi expressione oriatur ea pro radio osculi lineae breuissimae, si jungatur cum hac aequatione $ddz = \frac{dy(Pdz+dx)}{Pdy-Qdx}$ et locali $dz = Pdx + Qdy$. Prodibit autem radius osculi $= \frac{(dx^2+dy^2+dz^2)(Pdy-Qdx)}{dxddy\sqrt{(P^2+Q^2+1)}} = \frac{(dx^2+dy^2+dz^2)\sqrt{(P^2+Q^2+1)}}{ddz-Qddy} = \frac{(dx^2+dy^2+dz^2)\sqrt{(P^2+Q^2+1)}}{dPdx+dQdy}$. Atque haec expressio dat radium osculi curuae in superficie proposita descriptae a corpore a nullis potentiis sollicitato.

PROPOSITIO IO.

Theorema.

Tabula II.
Fig. 1.

74. *Pressio, quam corpus in superficie motum et a nullis potentiis sollicitatum in ipsam superficiem exercet, fit normaliter in eam versus eius convexitatem, et se habet ad vim gravitatis, ut altitudo celeritati corporis debita, ad dimidium radii osculi curvae a corpore descriptae.*

Demonstratio.

Sit DMm curua in superficie ABC a corpore descripta; altitudo celeritati corporis debita $= dv$; et radius osculi curvae $MO = r$. Quia corpus ex M , si libere moueri posset, progredetur in elemento Mn ; superficies vero efficit, ut per elementum Mm incedat, existente nm perpendiculo in superficiem; superficies a corpore

pore secundum directionem nm premetur, tanta vi, quanta opus est ad corpus ex directione Mn in directionem Mm pertrahendum. Hoc vero praestatur a vi $\frac{2v}{r}$ normaliter in superficiem seu secundum directionem radii osculi MO agente. Quamobrem pressio corporis in superficiem erit normalis, quippe agens secundum mn et aequalis $\frac{2v}{r}$, existente vi grauitatis corporis $= 1$. Q.E.D.

Corollarium I.

75. Haec est igitur vis centrifuga, quam corpus in superficiem simili modo exercet, quo in lineam datam, in qua moueri cogitur.

Scholion I.

76. Pressio in superficiem necessario debet esse normalis. Nam nisi esset normalis resolvi posset in duas, quarum altera esset normalis; altera in ipsa superficie posita. Harum vero normalis tantum ad premendam superficiem impenditur, dum altera ipsam corporis motum immutaret.

Corollarium 2.

77. Longitudinem radii osculi r lineae, quam corpus a nullis potentiis sollicitatum super proposita superficie describit, inuenimus (73). Ea igitur assumpta erit vis centrifuga $= \frac{(2v(ddx - Qddx))}{dx^2 + dy^2 + dz^2} \sqrt{(P^2 + Q^2 + 1)}$

$$= \frac{2v(dPdx + dQdy)}{(dx^2 + dy^2 + dz^2) \sqrt{(P^2 + Q^2 + 1)}}.$$

Scholion 2.

78. De hac vi centrifuga in superficiem exercita eadem locum habent, quae supra de vi centrifuga in datam curuam sunt annotata, vid. Prop. 2. cum annexis Coroll. et Schol. Linea enim breuissima, quam corpus super superficie percurrit, instar canalis considerari potest, in quo corpus moueatur; atque tum de motu in hoc canali omnia valent, quae supra de motu super data linea, nullis agentibus potentiis, sunt allata.

PROPOSITIO II.

Problema.

79. *Determinare effectum cuiusvis potentiae, quem exerit in corpus super data superficie motum tam in vacuo quam in medio resistente.*

Solutio.

Quaecunque sit directio potentiae sollicitantis corpus, ea resolvi potest in tres potentias laterales, quarum primae, quam vocabimus M, directio normalis in superficiem: secundae, quam per N designabimus directio normalis tam in directionem motus corporis quam in directionem potentiae M, cuius igitur directio erit in plano tangente superficiem, Tertiae potentiae T appellatae directio congruat cum directione motus, quae igitur erit vis tangentialis: priores vero erunt vires normales. Quia nunc harum trium virium directiones sunt inter se normales, nullius effectus a reliquis perturbari

turbari poterit. Quare quem effectum quaeque producat, inuestigabimus.

Prima potentia M , cuius directio in superficiem est normalis, nullum habebit effectum in immutando corporis motu; sed tota impendetur in pressionem superficiei. Augebit igitur vel diminuet pressionem a vi centrifuga ortam, pro-ut eius directio in plagam conuexae partis superficiei incidit, vel in plagam partis concavae. Incidat ea in partem interiorem erit totalis pressio in superficiem versus partes exteriores $= \frac{-2v(dpdx+dQdy)}{(dx^2+dy^2+dz^2)\sqrt{P^2+Q^2+1}} - M$ (77). Pressio enim a vi centrifuga orta minuetur hoc casu potentia M .

Secunda potentia N , quia eius directio in ipsa superficie est posita, et normalis in directionem corporis, corporis directionem tantum immutabit celeritatem neque augendo neque minuendo. Haec vis igitur corpus a linea breuissima deducet, facietque ut non amplius in plano ad superficiem normali moueatur: huius igitur plani, in quo corpus mouebitur, inclinationem ad planum lineae breuissimae normale in superficiem inuestigari oportet. Huius vero inclinationis angulo aequalis est angulus, quem radius osculi lineae descriptae cum normali in curuam constituit; quemque ante generaliter determinauimus (71). Postquam corpus elementum Mm celeritate altitudini v debita descripsit progredere-

tur, nisi a vi N sollicitaretur per elementum in v , ita ut Mm et mv essent duo elementa lineae breuissimae, et posita in plano ad superficiem normali, erit directio vis N normalis in planum chartae, sit ea $\nu\mu$; corpus igitur hac vi a plano chartae sursum reducetur, si quidem ponamus hanc vim N sursum esse directam hac elementorum positione ut in figura repraesentatur. Efficiat ergo haec vis, ut corpus per elementum $m\mu$ moueatur, anguloque $\nu m\mu$ a directione mv deflectat. Huic angulo respondet radius osculi =

$\frac{mv^2}{\mu\nu}$. Quare cum vis N hunc angulum generet, celeritasque curvae debita sit altitudini v , erit ex effectu virium normalium $N = \frac{2v \cdot \mu\nu}{m v^2}$ ideoque $\mu\nu = \frac{N \cdot m v^2}{2v}$. Quo nunc inclinatio plani $Mm\mu$, in quo corpus actu mouebitur, ad planum Mmv , quod in superficiem est normale, inueniatur, demittatur ex v in elementum Mm productum perpendicularum νn ; erit μn quoque in mn perpendicularare, ideoque angulus $\mu n v$ erit angulus inclinationis plani $\mu m M$ ad planum $\nu m M$; atque cum $\mu\nu$ sit normalis ad νn ; huius anguli tangens erit

$= \frac{\mu\nu}{\nu n} = \frac{N \cdot m v^2}{2v \cdot \nu n}$. At νn determinatur ex inclinatione elementorum Mm et mv seu radio osculi lineae breuissimae, cuius Mm et mv sunt elementa. Sit hic radius osculi r ; erit $\frac{m v^2}{\nu n} = r$, ideoque tangens anguli $\mu n v = \frac{Nr}{2v}$ $\frac{N(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{P^2 + Q^2 + 1}}{2v(dPdx + dQdy)}$, substituto loco r valore

valore inuento (73.). Huic vero angulo aequalis est angulus, quem radius osculi elementorum Mm , $m\mu$ a corpore actu descriptorum constituit cum radio osculi elementorum Mm , $m\nu$ seu cum normali in superficiem. Huius autem anguli tangentem supra invenimus (71.). Quare facta aequatione habebimus

$$\frac{ddy(dx+Pdz) - ddz(Pdy - Qdx)}{(ddz - Qddy) \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}} = \frac{N(dx^2 + dy^2 + dz^2) \sqrt{(P^2 + Q^2 + 1)}}{2v(dPdx + dQdy)},$$

qua aequatione effectus potentiae N determinatur. Seu cum sit $ddz - Qddy = dPdx + dQdy$ habebitur ista aequatio

$$ddy(dx + Pdz) - ddz(Pdy - Qdx) = \frac{N(dx^2 + dy^2 + dz^2) \sqrt{(P^2 + Q^2 + 1)}}{2v}.$$

Tertia potentia T , quia in directione corporis est posita, celeritatem tantum vel auget vel diminuit. Ponamus eam esse accelerantem, exprimetur eius effectus hac aequatione $dv = T \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$. Atque si motus in medio fiat resistente resistantiaque sit $= R$, minuenda tantum est vis tangentialis T resistantia R . Quamobrem habebitur $dv = (T - R) \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$. Q. E. I.

Corollarium I.

80. Ex duabus igitur aequationibus, quarum altera v altera dv determinat, una conflatur v non amplius continens, quae cum locali pro superficie $dz = Pdx + Qdy$ coniuncta deter-

38 CAPUT PRIMUM DE MOTU NON ϕ

minat curuam, quam corpus super proposita superficie describit.

Scholion I.

§1. De potentia N bene est attendendum in quam plagam tendat, h.e. an ad dextram an ad sinistram regionem corporis moti vergat? Pro hac enim differentia tangens anguli $\mu\nu$ vel affirmatiua vel negatiua est accipienda. De hoc vero non erimus hic solliciti, sed vltiorem huius rei disquisitionem in caput vltimum huius libri differemus.

Scholion 2.

§2. Ad sequens igitur caput secundum progredimur, in quo motum corporis super data linea in vacuo examinabimus. Capite tertio vero motus super data linea in medio resistente inuestigabimus. Quarto denique capite motum super data superficie tam in vacuo quam in medio resistente scrutabimur.

CAPUT

CAPUT SECUNDUM.

DE MOTU PUNCTI SUPER DATA LINEA
IN VACUO.

PROPOSITIO 12.

Problema.

83.

Sollicitetur corpus, quod super curua AM mo- Tabula III.
Fig. 3.
vetur, ubique a potentia MF cuius directio
sit parallela axi AP; determinare celeritatem
corporis in singulis punctis, atque tempus, quo
curuae quaevis portio describitur, nec non pressio-
nem, quam curua in singulis punctis patitur.

Solutio.

Descripserit corpus iam arcum AM, sitque
eius celeritas in A debita altitudini b , atque ce-
leritas in M debita altitudini v . Positis
nunc $AP = x$; $PM = y$; et arcu $AM = s$; re-
soluatur potentia MF, que sit p in laterales nor-
malem scilicet MN et tangentialem MT; erit
 $ds : dx = MF : MT$ et $ds : dy = MF : MN$. Hinc
igitur prodibit vis tangentialis $MT = \frac{p dx}{ds}$ et vis
normalis $= \frac{p dy}{ds}$. Perspicuum hic est vim tan-
gentialem celeritatem corporis minuere, erit er-
go $dv = -p dx$ (42.) atque $v = C - \int p dx$. Sum-
to autem integrali $\int p dx$ ita, vt evanescat posi-
to $x = 0$, erit $v = b - \int p dx$; ex qua aequatio-
ne

40 CAPVT SECVND. DE MOTV PVNCTI

ne corporis celeritas in singulis punctis cognoscitur. Ex eadem aequatione innotescit quoque tempus, quo arcus AM absolvitur, posito enim tempore t erit $t = \int \frac{ds}{\sqrt{(b - spdx)}}$. Vis normalis $MN = \frac{pdy}{ds}$ tota impenditur in curvae pressio-
nem secundum MN (39). augebit ergo pressio-
nem a vi centrifuga ortam, quia MN in oppo-
sitam radii osculi MO plagam cadit. Quare cum
posito radio osculi $NO = r$ vis centrifuga sit $=$
 $\frac{2v}{r}$ (20). Erit totalis pressio in curvam iuxta MN
 $= \frac{pdy}{ds} + \frac{2v}{r}$; Q. E. I.

Corollarium I.

84. Celeritas in M igitur tanta est, quanta foret in P , si corpus eadem celeritate initiali Vb per AP eadem in singulis altitudinibus potentia p sollicitatum ascendisset.

Corollarium 2.

85. Celeritas igitur non pendet a natura curvae, sed tantum ab altitudine, quam corpus percurrit. Si nimirum altitudinis elementum fue-
rit dx erit $dv = -pdx$ vel $dv = pdx$ prout cor-
pus vel ascendit vel descendit.

Corollarium 3.

86. Cum sit $v = b - spdx$, si sumatur abscis-
sa x tanta uti AC , pro qua sit $spdx = b$; erit
corporis in illa altitudine B celeritas $= 0$. Cor-
pus igitur in B vsque ascendit, ibique quiescet,
continuo vero ex B descendet per BMA .

Co-

Corollarium 4.

87. Si ascensus per AMB cum ascensu rectilineo per APC comparetur, erit tempus per elementum Mm ad tempus per Pp , vt Mm ad Pp i.e. vt ds ad dx .

Corollarium 5.

88. Quare si linea AMB fuerit recta, ob rationem Mm ad Pp constantem, erit tempus per AM ad tempus per AP in constanti ratione nempe ea, quam habet sinus totus ad cosinum anguli A , seu quam habet longitudo AB ad AC .

Corollarium 6.

89. Posito elemento Pp constante est radius osculi $r = \frac{ds^3}{dx ddy}$, ideoque vis centrifuga $= -\frac{2v dx ddy}{ds^3} = -\frac{2(b - \int p dx) dx ddy}{ds^3}$. Quare pressio totalis erit $= \frac{p ds^2 dy - 2(b - \int p dx) dx ddy}{ds^3}$.

Scholion I.

90. Quemadmodum in hoc problemate ex datis curua et potentia sollicitante inuenta sunt, celeritas in singulis punctis, tempus per quemvis arcum, et pressio in singula curuae puncta: ita ex harum quinque rerum duabus quibusque datis, reliquae tres possunt inueniri. Ex quo decem nascentur problemata, quae omnia solutionem ex huius problematis solutione habebunt.

Scholion 2.

91. Similiter habebuntur decem huiusmodi quaestiones, si directiones potentiae sollicitantis non fuerint parallelae, sed vel conuergentes ad centrum virium, vel alio modo determinatas directiones habentes. At si etiam directio inter quaesita ponatur tunc ob sex res in computum ducendas, ex ternis quibusque, reliquae tres inueniuntur; hincque viginti orientur problemata.

Scholion 3.

92. Orientur porro problemata indeterminata, vt si loco temporis per quamvis curuae portionem tantum integrum tempus per *AMB* daretur, tum enim infinitae solutiones locum haberent. Praeterea si plures descensus vel ascensus integri considerentur super eiusdem curuae variis partibus, eorumque ratio detur, numerus quaestionum multo magis augebitur. Ad hoc genus pertinet quaestio de inuenienda curua, super qua omnes descensus ad datum punctum fiant eodem tempore, quas tanquam difficillimas vltimo pertractabimus. Nunc autem primum curuam et potentiam sollicitantem tanquam datas accipiemus et problemata eo pertinentia soluemus. Deinceps vero ex aliis datis, quemadmodum reliqua sint inuenienda, monstrabimus.

PRO-

PROPOSITIO 13.

Problema.

93. Si potentia sollicitans fuerit uniformis et ubique deorsum tendat, determinare descensum corporis super data curua AM in A ex quiete incipientem, atque pressionem, quam curua, in singulis punctis M sustinet.

Tabula III
Fig. 4

Solutio.

Ducta verticali AP seu parallela directionibus potentiae MF, atque applicata rectangula MP, sit $AP = x$, $PM = y$, curua $AM = s$. Ponatur potentia $MF = g$, existente vi grauitatis $= x$, et celeritas in M debita altitudini v . His positis erit vis normalis $= \frac{g dy}{ds}$ et vis tangentialis $= \frac{g dx}{ds}$ (83.). Quia hoc casu vis tangentialis accelerat, erit $dv = g dx$, et $v = gx$, ob celeritatem in A $= 0$. Deinde quia radius osculi in MO directus est $= \frac{+ ds^3}{dx ddy}$, posito dx constante, erit vis centrifuga $= \frac{+ 2v dx ddy}{ds^3}$, cuius directio est MN. Secundum eandem plagam vero premit vis normalis $\frac{g dy}{ds}$. Quare tota pressio, quam curua in M sustinet secundum MN est $= \frac{g dy}{ds} + \frac{2v dx ddy}{ds^3} = \frac{g dy}{ds} + \frac{2gx dx ddy}{ds^3}$ ob $v = gx$. Tempus vero quo corpus arcum AM percurrit est $= \int \frac{ds}{\sqrt{gx}}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

94. Celeritas igitur in M tantum ab altitudine AP, per quam descendit, pender, atque tanta est, quantam idem corpus ex AP delapsum et ab eadem potentia g sollicitatum acquirit.

Corollarium 2.

95. In quacunque igitur curua corpus a potentia vniformi g sollicitatum ex quiete descendat, celeritates erunt radicibus quadratis ex altitudinibus percursis proportionales, est enim celeritas, vt \sqrt{v} i. e. vt \sqrt{gx} .

Corollarium 3.

96. Tempus quo primum elementum Aa percurritur, est $\int \frac{ds}{\sqrt{gx}}$ euanescente x. Si igitur angulus PAa fuerit recto minor seu $s = nx$, erit tempus per Aa infinite paruum, ideoque tempus AM finitum, nisi curua vel ascendat inter A et M, supra A vel in infinitum progrediatur. At si angulus PAa fuerit rectus, erit ipso puncto A, $s^n = ax$, existente n numero vnitare maiore, ideoque $\sqrt{gx} = s^{\frac{n}{2}} \sqrt{\frac{g}{a}}$, et $\int \frac{ds}{\sqrt{gx}} = \frac{2-n}{2-n} \sqrt{\frac{a}{g}}$. Quare si n fuerit binario minor, tempus per Aa erit infinite paruum, et tempus per AM finitum. At si $n = 2$ vel > 2 tempus per primum elementum Aa erit infinite magnum, seu corpus ex A nunquam egredietur.

Co-

Corollarium 4.

97. Quoties autem $n < 2$, toties radius osculi in A est infinite parvus. Quare in casu quo tangens curvae in A ad AP est normalis, corpus non descendet, nisi radius osculi in A fuerit infinite parvus.

Scholion I.

98. Ex eo, quod primum elementum tempore infinite paruo percurritur, recte concluditur tempus per arcum AM esse finitum, cum enim corpus motu accelerato per AM descendat, multo celerius sequentia elementa describentur, et hanc ob rem tempus debet esse finitum. Exemplis autem sequentibus omnia illustrabuntur.

Exemplum I.

Tabula III.
Fig. 5.

99. Sit linea AM recta vtcunque inclinata ad verticalem AP, atque cosinus ang. A = n , erit $x = ns$. Tempus ergo, quo corpus per AM descendit, erit $= \int \frac{ds}{\sqrt{gns}} = \frac{2\sqrt{s}}{\sqrt{gn}} = \frac{2\sqrt{AM}}{\sqrt{gn}} = \frac{2AM}{\sqrt{g \cdot AP}}$. Seu tempus per lineam vtcunque inclinatam est directe, vt radix ex ipsa linea et inverse, vt radix ex cosinu anguli inclinationis MAP. Vis centrifuga erit autem = 0, quare linea AM tantum a vi normali premitur, quae est $= gV(1-n^2) = \frac{g \cdot PM}{AM}$.

Corollarium 5.

100. Tempus ergo per AM est ad tempus per AK, vt \sqrt{AM} ad \sqrt{AK} . At tempus per AM est ad tempus per AP vt AM ad AP. (88). Qua-

46 CAPVT SECVND. DE MOTU PVNCTI

re si fuerit $AM:AP = \sqrt{AM}:\sqrt{AK}$, seu $AM:AP = AP:AK$, quod euenit si PK est in AM perpendicularis tum tempus descensus per AK aequale est tempori descensus per AP .

Corollarium 6.

101. Patet etiam tempus descensus per perpendiculum PK aequale esse tempori descensus per AP . Est enim cosinus anguli $APK = \frac{PK}{AP}$; Quare cum sit tempus per AP ad tempus per KP vt $\frac{\sqrt{AP}}{\sqrt{1}}$ ad $\sqrt{KP}:\sqrt{\frac{PK}{AP}}$, erit haec ratio aequalitatis.

Corollarium 7.

Tabula IV.
Fig. 1. 102. Ex hoc perspicitur in circulo $APPB$ omnes descensus per chordas AP ex puncto supremo A ductas, nec non omnes descensus per chordas ad punctum infimum B ductas aequalibus fieri temporibus; eo scilicet tempore, quo corpus per diametrum AB perpendiculariter delabitur.

Exemplum 2.

Tabula IV.
Fig. 2. 103. Si curua AMB fuerit circulus, ac radius $BC = a$ et AP tangat circulum, erit $(a-y)^2 + x^2 = a^2$ seu $y = a - \sqrt{a^2 - x^2}$. Habebitur ergo $ds = \frac{a dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, et ob $v = gx$ et $r = a$ erit vis centrifuga $= \frac{2gx}{a}$; atque ob $dy = \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ tota pressio, quam circulus in M sustinet $= \frac{3gx}{a}$. Triplo igitur maior est tota pressio, quam sola vis normalis. Tempus deinde, quo arcus AM percurritur, est

$= \int \frac{a dx}{\sqrt{g(a^2 x^2 - x^3)}}$, cuius integratio neque a circuli nec hyperbolae quadratura pendet, sed ope rectificationis curvae elasticae construi potest. Tempus interim per quadrantem AB est $= 2\sqrt{\frac{a}{g}} \times (1 + \frac{1}{2.3} + \frac{1.3}{2.4.9} + \frac{1.3.5}{2.4.6.13} + \text{etc.})$.

Corollarium 8.

104. Cum corpus ad infimum punctum B pervenerit, ibi habebit celeritatem altitudini ga debitam. Hac igitur ascendet in altero quadrante BD pertinetque ad D, vbi eius celeritas evanescet, ideoque rursus descendet ad B tumque ad A per BA reascendet. Similis vero erit ascensus descensui per quadrantem, quia corpus siue ascendat siue descendat in iisdem punctis eandem habet celeritatem.

Scholion 2.

105. Alia exempla non afferimus, cum in sequentibus, vbi plures descensus ad punctum fixum super data linea considerabimus, plura simus allaturi. Nunc vero primum eas quaestiones evolvemus, quae pertinent ad motum super data linea, ex dato puncto fixo a quiete incēptum: cuius modi est problema sequens.

PROPOSITIO 14.

Problema

106. Si fuerint infinitae curvae similes AM, Tabula IV.
AM etc. ex puncto fixo A initium sumentes; inuenire Fig. 3.
cur-

48 CAPUT SECVND. DE MOTU PVNCTI

curuam C M M, ab illis curuis arcus A M, A M etc. abscindentem, qui a descendente super iis corpore aequalibus temporibus percurrantur; existente ut ante potentia sollicitante vniiformi et vbique deorsum directa.

Solutio.

Ex infinitis curuis datis fumatur vna quaecunque A M, cuius parameter sit a . Positoque $AP=x$, $PM=y$ et arcu $AM=s$, et existente ut ante potentia sollicitante $=g$; descendat corpus super curuam A M, erit celeritas in M debita altitudini gx . Tempus ergo descensus super A M erit $=\int \frac{ds}{\sqrt{gx}}$. Ab omnibus ergo curuis A M, A M etc. tanti arcus sunt abscindendi, ut pro iis sit $\int \frac{ds}{\sqrt{gx}}$ quantitas constans. At $\int \frac{ds}{\sqrt{gx}}$ ad alias curuas referetur, si praeter s et x etiam parameter a ponatur variabilis. Posito igitur in $\int \frac{dx}{\sqrt{gx}}$ etiam a variabili, quantitas $\int \frac{ds}{\sqrt{gx}}$ ponenda est $=$ constanti, nempe ei tempori quo omnes descensus fieri debent. Sit hoc tempus $=k$ erit $k=\int \frac{dx}{\sqrt{gx}}$ in singulis curuis. Quare si $\int \frac{ds}{\sqrt{gx}}$ ita differentietur ut etiam a variabile ponatur, hoc differentiale nihilo aequale est ponendum. Ad hoc differentiale inueniendum sit $ds=pdx$, eritque p , quia omnes curvae ponuntur similes, functio in qua a et x nullum dimensionum numerum simul constituunt. Habebimus ergo $\int \frac{pdx}{\sqrt{gx}}$: hoc differentiatum posito quoque a variabili dabit

$$\frac{pdx}{\sqrt{gx}}$$

$\frac{pdx}{\sqrt{gx}} + q da$, quod fieri debet $= 0$. Quantitas q vero sequenti modo inuenietur. Quia est $k = \int \frac{pdx}{\sqrt{gx}}$; in quantitate k , variables a et x dimensionum numerum constituent $\frac{1}{2}$. Ostendi autem alibi in Tom. IX. Comment. tum fore $\frac{px}{\sqrt{gx}} + qa = \frac{k}{2}$. Ex quo inuenitur $q = \frac{k}{2a} - \frac{p\sqrt{x}}{a\sqrt{g}}$. Habebitur ergo $\frac{pdx}{\sqrt{gx}} + q da = \frac{pdx}{\sqrt{gx}} + \frac{k da}{2a} - \frac{pda\sqrt{x}}{a\sqrt{g}} = 0$. Quae est aequatio pro curua quaesita. At si aequatio inter coordinatas x et y pro curua CMM desideretur, ex aequatione pro quaque curuarum AM, valor ipsius a in x et y inuentus substitui debet.

Q. E. I.

Corollarium I.

107. Aequatio etiam primo inuenta $\frac{pdx}{\sqrt{gx}} = \frac{pda\sqrt{x}}{a\sqrt{g}} - \frac{k da}{2a}$ sufficit ad curuam CMM inueniendam. Nam pro quavis abscissa $AP = x$ ex ea inuenitur a parameter eius curuae AM, cuius punctum M respondens assumtae abscissae x est in curua quaesita CMM.

Corollarium 2.

108. Cum autem haec aequatio sit differentialis, ideoque ad plures curuas pro constante quae adiicitur, pertineat; notandum est in additione constantis, eam tantum solutioni esse convenientem, quae pro data curua seu pro dato ipsius a valore det abscissam x tantum arcum AM abscindentem, qui tempore k descensu abfoluatur.

Corollarium 3.

109. Si tempus k aequale esse debeat tempori descensus per verticalem $AC = b$, erit $k = \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{g}}$. Quo valore substituto habebitur aequatio $\frac{pdx}{\sqrt{x}} = \frac{pda\sqrt{x}}{a} - \frac{da\sqrt{b}}{a}$. In cuius integratione id est faciendum, vt curua per punctum C transeat.

Scholion I.

110. Erit autem semper recta verticalis AC species curuarum AM ; quae oritur, si parameter a vel infinite magna vel infinite parua accipiat. Quare commodissime tempus constans k per descensum per verticalem AC , quippe speciem curuarum AM , exprimitur. Atque in constructione aequationis inuentae $\frac{pdx}{\sqrt{x}} = \frac{pda\sqrt{x}}{a} - \frac{da\sqrt{b}}{a}$ tanta constans est addenda, vt posito $x = b$, fiat a vel infinitum vel nihil; prout ille vel iste valor ipsius a recta AC respondeat.

Scholion 2.

111. Si $\frac{ds}{\sqrt{gx}}$ reipsa potest integrari, ne data quidem aequatione opus est, ad quam inueniendam opus fuit q determinare. Nam si integrale ipsius $\frac{ds}{\sqrt{gx}}$ iterum differentietur posito quoque a variabili reipsa obtinetur q ; atque hoc differentiale tantum nihilo aequale esset ponendum. Commodissime vero his casibus problema soluetur, si integrale ipsius $\frac{ds}{\sqrt{gx}}$ statim ipsi k vel $\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{g}}$ aequale ponatur, et loco a eius valor in x et y substituat ex aequatione pro curuis datis. Atque hoc

mo-

modo solutio in promptu est non solum pro curuis similibus, sed dissimilibus etiam, si modo tempora descensus per quantitates finitas exprimi possunt.

Exemplum I.

112. Si omnes hae curvae AM fuerint rectae diuersimode ad verticalem AC inclinatae, erit $y = nx$ et $s = x\sqrt{1+n^2}$ ubi n tanquam parameter est consideranda. Erit ergo $\int \frac{ds}{\sqrt{gx}} = \int \frac{dx\sqrt{1+n^2}}{\sqrt{gx}}$
 $= \frac{2\sqrt{x(1+n^2)}}{\sqrt{g}}$ quod aequale poni debet ipsi $\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{g}}$.
 Erit itaque $x(1+n^2) = b$. Cum autem n sit quantitas variabilis, ponatur pro ea valor $\frac{y}{x}$ ex aequatione $y = nx$: quo facto prodibit pro curva CMM aequatio inter coordinatas orthogonales x et y ista $y^2 + x^2 = bx$, quae est pro circulo, cuius diameter est recta $AC = b$.

Scholion 3.

113. Hic casus est ille ipse casus ante pertractatus (102), ibi enim ostensum est corpus per omnes chordas in circulo ex puncto supremo eductas aequalibus temporibus descendere. Pertinet hic quidem casus non ad curuas similes; sed hoc exemplum attulimus ad casum Scholii 2. illustrandum, quia pro rectis hisce tempora descensus finitis quantitatibus exprimuntur. Sequentia exempla vero curuas similes, vti propositio postulat, complectentur.

Exemplum 2.

114. Sint curvae AM, AM omnes circuli tangentes verticalem AC in A. Ponatur radius cuiusque eorum $= a$, erit $y = a - \sqrt{a^2 - x^2}$ atque $a = \frac{y^2 + x^2}{2y}$. Hi circuli vero omnes sunt curvae similes, quia a , y et x in aequatione eundem dimensionum numerum tenent, seu homogeneitatem complent sola. Radius igitur a tanquam parameter variabilis debet tractari. Habetur autem ex illa aequatione $ds = \frac{adx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, quare erit $p = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, ideoque praescriptam habet proprietatem, ut a et x dimensionum numerus sit nullus. Hanc ob rem pro curua CMM haec habebitur aequatio $\frac{adx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{da\sqrt{x}}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{da\sqrt{b}}{a}$, seu haec $\frac{da\sqrt{b}}{a} = \frac{x da}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{adx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$. Quae aequatio construi potest, posito enim $x = au$, prodit $\frac{da\sqrt{b}}{a\sqrt{a}} = \frac{du}{\sqrt{u - u^3}}$ in qua indeterminatae sunt a se inuicem separatae. Quo autem aequatio inter coordinatas x et y pro curua CMM obtineatur, ponatur loco a valor $\frac{y^2 + x^2}{2y}$ et loco da eius differentiale $\frac{y^2 dy + 2yx dx - x^2 dy}{2y^2}$. Quibus substitutis sequens prodit aequatio differentialis $-x dy + y dx = \frac{(y^2 dy + 2yx dx - x^2 dy)\sqrt{bx}}{y^2 + x^2}$. Quae ita integrari debet ut posito $x = b$ fiat $y = 0$, quia curua per punctum C transire debet.

Corollarium 4.

115. Ex hac aequatione tangens curvae CMM in singulis punctis cognoscitur, et ex positione tangents innotescit angulus AMM, quo cur-

curua CMM quamlibet datarum interfecat. Erit scilicet tangens anguli AMM $= \frac{y}{x - \sqrt{bx}}$. Hic ergo angulus est rectus in C, ob $x=b$, seu curua CMM in C ad AC est normalis.

Corollarium 5.

116. Si b vel maior vel minor accipiatur curua CMM alia quoque erit, hocque modo infinitae orientur curuae a circulis arcus isochronos abscindentes. Haeque curuae omnes inter se erunt similes, ob parametrum b , quae in aequatione cum x et y homogeneitatem constituit. Data ergo vna curua CMM innumerabiles aliae ex ea construi possunt, abscissis scilicet et applicatis curuae CMM in eadem ratione augendis vel diminuendis, in qua AC seu b augetur vel diminuitur.

Exemplum 3.

117. Sint curuae AM, AM omnes cycloides cuspides in A habentes et tangentes verticalem AC in A. Posita parametro cuiusque cycloidis AM seu dupla diametro circuli generatoris $=a$; erit ex natura cycloidis $s=a-\sqrt{a^2-2ax}$

atque $ds = \frac{a dx}{\sqrt{a^2-2ax}}$; hincque $dy = \frac{dx \sqrt{2ax}}{\sqrt{a^2-2ax}}$. Hoc ergo casu est $p = \frac{a}{\sqrt{a^2-2ax}}$, functio ipsarum a et x nullius dimensionis vt requiritur. Quare pro

curua CMM reperitur ista aequatio $\frac{a dx}{\sqrt{a^2x-2ax^2}}$
 $= \frac{da \sqrt{x}}{\sqrt{a^2-2ax}} - \frac{d^2a \sqrt{b}}{a}$ seu $\frac{x da - a dx}{\sqrt{a^2x-2ax^2}} = \frac{da \sqrt{b}}{a}$. Si
 G 3 aequa-

aequatio inter coordinatas orthogonales x et y consideretur, ex aequatione $y = \int \frac{dx \sqrt{2ax}}{\sqrt{a^2 - 2ax}}$ seu huius differentiali posita quoque a variabili, valor ipsius a debet substitui. Haec vero aequatio differentiatia posito a quoque variabili dat $ady - yda = \frac{adx\sqrt{2ax} - xda\sqrt{2ax}}{\sqrt{a^2 - 2ax}}$ seu $\frac{ady - yda}{\sqrt{2a}} = \frac{axdx - x^2da}{\sqrt{(a^2 - 2ax)^3}}$. Quae abit in hanc $\frac{ady - yda}{a^2\sqrt{2}} = \frac{axdx - x^2da}{a^2\sqrt{(ax - 2x^2)^3}}$. Superior vero per $\frac{1}{4\sqrt{a}}$ multiplicata praebet hanc, $\frac{da\sqrt{b}}{4a\sqrt{a}} = \frac{axda - a^2dx}{4a^2\sqrt{(ax - 2x^2)^3}}$. Hae duae aequationes additae dant aequationem integrabilem, cuius integralis est $\frac{y}{a\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{a}} = \frac{-\sqrt{(ax - 2x^2)}}{2a}$. Ex qua valor ipsius a erutus fit $\sqrt{a} = \frac{y\sqrt{2b} \pm \sqrt{(2y^2x - 2bx^2 + 2x^3)}}{b - x}$ et $\sqrt{(ax - 2x^2)} = \frac{yx\sqrt{2} \pm \sqrt{(2by^2x - 2b^2x^2 + 2bx^3)}}{b - x}$. Quibus valoribus in aequatione $\frac{(xdy - ydx)\sqrt{a} + xdx\sqrt{2b}}{\sqrt{(ax - 2x^2)}} = dy\sqrt{b}$, quae oritur ex duabus differentialibus eliminato da , substitutis prodibit $\frac{xdy - ydx - bdy}{\sqrt{b}} = \frac{dx\sqrt{(y^2 - bx + x^2)}}{\sqrt{x}}$ aequatio pro curua quaesita CMM.

Corollarium 6.

118. Ex hac aequatione inuenitur tangens anguli, quem curua CM cum applicata PM constituit nempe $\frac{dx}{dy} = \frac{-(b-x)\sqrt{x}}{y\sqrt{x} + \sqrt{(by^2 - b^2x + bx^2)}}$. Deinde etiam innotescit tangens anguli, quem cyclois AM cum

cum applicata P M constituit. Ex aequatione cycloidis erit nimirum $\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{a^2 - 2ax}}{\sqrt{2ax}} = \frac{\sqrt{ax - 2x^2}}{x\sqrt{2}}$.

Eliminato vero a erit ista tangens $= \frac{2\sqrt{x} + \sqrt{(by^2 - b^2x + bx^2)}}{(b-x)\sqrt{x}}$.

Quare cum horum angulorum alter alterius sit complementum, sumto illius deinceps posito, erit angulus, quem curua CMM cum qualibet datatarum AM constituit, rectus. Consequenter curua CMM est traiectoria orthogonalis omnium cycloidum datarum AM, AM &c.

Corollarium 7.

119. Sumto AC alius magnitudinis, aliae quoque curuae CMM prodibunt, et sic infinitae traiectoriae orthogonales inveniuntur, quae omnes inter se sunt similes. Data ergo vna faele quotquot libuerit, construere licebit.

Scholion 4.

120. Omnes hae curuae arcus abscindentes isochronos, quaecunque fuerint curuae secandae, semper construi possunt, etiam si id ex aequatione non appareat. Per quadraturas enim ex datis curuis arcus possunt abscindi, qui dato tempore descensu absoluantur, hocque modo puncta quotlibet curuae quaesitae inveniuntur. Si quidem curuae secandae sunt algebraicae, aequatio pro curua secante semper ita est comparata, ut factis debitis substitutionibus indeterminatae a se inuicem possint separari. At si curuae secandae differenti-

tiali

tiali aequatione exprimantur, aequatio differentialis pro curua secante rarissime separationem indeterminatarum admittit. Causa est, quod peculiari modo, quo in hoc cycloidum casu usus sum, parameter a eliminari debeat; eaque substitutio ad separationem non deducat.

Scholion 5.

121. Deinde obseruandum est, omnes curuas arcus isochronos abscindentes, quarum numerus pro vario ipsius b valore est infinitus, inter se similes esse, si quidem curuae secandae fuerint tales. Colligitur hoc ex generali aequatione $\frac{pdx}{\sqrt{x}} = \frac{pda\sqrt{x}}{a} - \frac{da\sqrt{b}}{a}$ in qua cum p sit functio ipsarum a et x nullius dimensionis quantitates a , b et x homogeneitatem constituunt. At ex aequatione curuarum secundarum, quia in ea a , x et y vbique eundem dimensionum numerum conficere ponuntur, valor ipsius a erit functio ipsarum x et y vnius dimensionis. Quare eo substituto loco a habebitur aequatio pro curua secante, in qua b , x et y vbique eundem dimensionum numerum constituunt. Consequenter b variabili posito oriuntur infinitae curuae similes inter se respectu puncti A. Data ergo vnica, reliquae facile ex similitudinis ratione describuntur.

Scholion 6.

122. Materia haec de arcubus isochronis abscindendis iam praeterito seculo est pertractata
in

in Act. Erud. Lips. A. 1697. a Cel. Ioh. Bernullio, atque postmodum in Comment. Acad. Paris. a Cel. Saurino, qui vero alia methodo sunt vsi. Ego vero eam adhibui methodum, quam in nostris Comment. pro A. 1734. tradidi, tanquam commodissimam ad huiusmodi problemata solvenda. In his vero locis Viri Cel. curvas quoque similes tantum, vt ego, consideraerunt, sine dubio, quia pro curvis dissimilibus solutio fit nimis difficilis et saepe etiam vires superat. Vocantur vero in locis citatis hae curvae synchronae, quia arcus simul percursum abscinduntur.

Scholion 7.

123. Ex mea differtatione Tomi IX. Comment. Acad. Petrop. apparet, has curvas synchronas simili modo posse inveniri, si curvae datae etiam non fuerint similes, sed eiusmodi tamen, vt posito $ds = p dx$, in p quantitates a et x datum dimensionum numerum constituent; tum enim aequae facile valor literae q inuenitur. Vt si numerus dimensionum ipsarum a et x in p fuerit n , aequatio pro curua secante reperietur

haec $\frac{p dx}{\sqrt{x}} = \frac{p da \sqrt{x}}{a} - \frac{(2n+1) da \sqrt{b}}{a}$. Quare si fue-

rit $n = -\frac{1}{2}$, vt si fuerit $p = \frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$, erit $\frac{dx}{x} = \frac{da}{a}$ ideoque $x = ma$, seu x in data ratione ad parametrum a est capiendum: quo igitur casu constructio synchronarum est facillima. At si p

Tom. II.

H

non

non huiusmodi habuerit^{mod} valorem, ex supra citata differtatione mea intelligitur, quo modo in aequationem quaesitam fit inquirendum.

PROPOSITIO 15.

Problema.

Tabula IV.
Fig. 4.

124. *Si fuerit, vt ante infinitae curuae similes AM, AM etc. et recta positione data DE; invenire eam curuam AMN, super qua corpus tempore breuissimo ex A ad rectam DE descensu peruenit.*

Solutio.

Descripta per Prop. praeced. quacunque curva CMM arcus AM isochronos abscindente, ducatur tangens GMH parallela datae rectae DE. Manifestum est super curua AM, quae ad punctum contactus M tendit, corpus tempore breuissimo ad rectam GMH esse venturum, quia quaeque alia puncta rectae GMH extra curuam CMM cadunt, ideoque longiore tempore opusest, quo corpus ad ea perveniat. Iam, quoniam omnes curuae a curuis AM, AM arcus isochronos abscindentes sunt inter se similes (121). concipiatur ex iis una quae rectam DE tangat, dico punctum contactus fore in N puncto, quo recta AM per prius punctum contactus M ducta rectae DE occurrit. Sequitur hoc tum ex natura similitudinis curvarum CMM respectu puncti A, tum etiam ex eo, quod arcus AMN similis sit arcui AM, atque rectae DE in eodem angulo occurrat, quo curua AM rectae GH. Quare

re cum corpus per AM tempore breuissimo ad GH perueniat, necesse est, vt quoque tempore breuissimo super curua AMN ad rectam DE perueniat. Q. E. I.

Corollarium 1.

125. Ex hoc perspicitur, si recta DE fuerit horizontalis, corpus descensu per verticalem AC ad eam citissime peruenire, ob tangentem curuae CMM in C horizontalem: id quod quidem per se perspicuum est.

Corollarium 2.

126. Si ergo curuae AM, AM fuerint cycloides vt in exemplo 3. Propos. praec. posuimus, corpus super ea cycloide celerrime ad rectam DE peruenit, quae huic rectae in N ad angulos rectos occurrit; quia angulus, quem quaeque cyclois cum curua CM constituit, est rectus.

Corollarium 3.

127. Si igitur recta DE fuerit verticalis seu parallela ipsi AC, portio cycloidis AMM erit dimidia cyclois. Quare super dimidia cycloide motus horizontalis est celerrimus.

Corollarium 4.

128. Si curuae AM, AM sint rectae ex puncto A ad rectam positionem datam DE ductae, corpus super ea AM citissime ad DE perueniet, quae est chorda circuli per A transeuntis et centrum in verticali AB habentis, atque rectam DE tangentis. (112.).

Tabula IV.
Fig. 5.

Corollarium 5.

129. Si igitur angulus DCA fuerit n graduum erit angulus BAM $\frac{90+n}{2}$ graduum, et angulus AMC graduum $\frac{90-n}{2}$. Seu ducta horizontali AGH, anguloque DGH bisecto recta GF, erit quaesita linea AM parallela ipsi GF.

Corollarium 6.

130. Quare si linea DE fuerit verticalis corpus ad eam citissime perueniet descendendo super recta ad horizontem angulo semirecto inclinata. Corpus igitur super recta hoc modo inclinata motu horizontali celerrime progreditur.

Scholion.

Tabula IV.
Fig. 4.

131. Simili modo quoque inueniri potest, super quam infinitarum curuarum similium AM, AM corpus descensu citissime ad datam curuam perueniat. Nam si linea GMH fuerit curua quaecunque tangens curuam CMM in M, corpus super hac curua AM celerrime ad curuam GMH perueniet, si quidem tota curua GMH extra curuam CMM fuerit sita. Eodem etiam modo posset determinari, si curuae AM, AM non fuerint similes, super quam corpus celerrime ad datam lineam GH perueniat. Ex infinitis enim curuis CMM arcus isochronos abscindentibus ea est quaerenda, quae datam GMH tangat, eritque ea curua AM, quae per punctum contactus transit ea, quae quaeritur. Sed cum in his casibus difficile plerumque sit curuas CMM inuenire, multoque

toque difficilius eam determinare, quae datam lineam tangat; quaestionem ad curuas similes tantum restrinximus.

PROPOSITIO 16.

Theorema.

132. *Tempora descensuum, quibus corpus curuas AM et Am similes similiterque ex puncto A positas percurrit, sunt in ratione subduplicata laterum homologorum.* Tabula IV.
Fig. 6.

Demonstratio.

Quia curvae AM, Am sunt similes, erunt AM: Am; AP: Ap; et PM: pm in data ratione, nempe ea, quam latera homologa tenent; fit haec ratio laterum homologorum N: n. Quia celeritas in M est ad celeritatem in m, ut \sqrt{AP} ad \sqrt{Ap} , erunt celeritates in M et m in ratione subduplicata laterum homologorum. Sumantur jam ex M et m elementa similia rationem scilicet N ad n tenentia, erunt tempora, quibus haec duo elementa homologa percurruntur in ratione composita ex directa elementorum, i. e. N ad n et reciproca celeritatum, i. e. \sqrt{N} : \sqrt{n} . Ex quo sequitur, tempora, quibus curvarum AM, Am elementa homologa percurruntur, esse in ratione subduplicata laterum homologorum. Quare cum haec ratio sit constans, tempora, quibus totae curvae AM et Am percurruntur, eandem hanc rationem tenebunt. Q. E. D.

Corollarium 1.

133. Tempora igitur, quibus arcus circulares similes similiterque positi descensu percurruntur, sunt in subduplicata ratione radiorum.

Corollarium 2.

134. Pendula igitur, quae arcus circulares similes describunt, oscillationes absolvent temporibus, quae rationem subduplicatam longitudinum pendulorum tenebunt.

Corollarium 3.

135. Eadem ratio temporum locum habet, si corpora pendula non circulos describant, sed alias curuas, dummodo eae fuerint inter se similes, similesque arcus absoluantur.

Scholion.

136. In his autem omnibus potentiam sollicitantem semper ponimus vniformem, deorsumque tendentem, etiamsi hanc conditionem omiserimus. Hanc enim hypothesin ante pertractare constituimus, quam ad alias sumus progressuri.

PROPOSITIO 17.

Problema

Tabula V.
Fig. 1.

137. *Existente potentia sollicitante vniformi tendenteque deorsum, moueatur corpus super curua quacunque AM cum data celeritate initiali in A: deter-*

terminare motum corporis super hac curua, et pressionem, quam curua in singulis punctis sustinet.

Solutio.

Posita potentia sollicitante g , et celeritate initiali in A debita altitudini b , praetereaue $AP = x$; $PM = y$; $AM = s$ et celeritate in M debita altitudini v . His positis erit $dv = g dx$, (93.) vnde fit $v = b + gx$. Porroque tempus per arcum AM erit $\int \frac{ds}{v}$. Deinde pressio totalis, quam sustinet curua secundum directionem normalis MN erit $= \frac{g dy}{ds} + \frac{2v dx dy}{ds^3}$ (93.) $= \frac{g dy}{ds} + \frac{2(b+gx) dx dy}{ds^3}$ existente dx elemento constante. Hoc enim tantum differt haec solutio a solutione Prop. 13. quod ibi esset $v = gx$, hic vero fit $v = b + gx$. Ex his igitur formulis tum motus tum pressio cognoscitur. Q. E. I.

Corollarium I.

138. Si linea AM fuerit recta, jam ex §. 88. intelligitur tempus per AM esse ad tempus descensus per AP eadem celeritate \sqrt{b} incepti, ut est AM ad AP. Pressio vero ob evanescentem vim centrifugam erit $= \frac{g dy}{ds}$ seu constans.

Corollarium 2.

139. Patet etiam hoc casu, quo motus non a quiete incipit, celeritatem ab altitudine tantum pendere. Quare quaecunque fuerit curua AM celeritas corporis in quouis eius puncto innotescit, etiam incognita curuae natura.

Exem-

64 CAPUT SECVND. DE MOTU PVNCTI

Exemplum I.

140. Sit curua AM parabola verticem in A et axem verticalem AP habens; erit ergo posita eius parametro $= a$, $y^2 = ax$; et $dy = \frac{a dx}{2\sqrt{ax}}$ et $ds = \frac{dx\sqrt{a^2+4ax}}{2\sqrt{ax}}$. Habebitur ergo tempus per AM $= \int \frac{dx\sqrt{a+4x}}{2\sqrt{x(b+gx)}}$. Deinde cum posito dx constante fit $ddy = \frac{-adx^2}{4x\sqrt{ax}}$, erit $\frac{dx ddy}{ds^3} = \frac{-2a}{(a+4x)\sqrt{a^2+4ax}}$. Consequenter pressio totalis est $= \frac{ga}{\sqrt{a^2+4ax}} - \frac{4a(b+gx)}{(a+4x)\sqrt{a^2+4ax}}$ $= \frac{ga^2-4ab}{(a+4x)\sqrt{a^2+4ax}}$.

Corollarium 3.

141. Si igitur est $b = \frac{ga}{4}$, pressio curuae evanescit. Corpus ideo hoc casu libere in hac parabola moveri posset; qui est etiam ipse casus praecd. Libro pertractatus.

Corollarium 4.

142. Existente igitur $b = \frac{1}{4}ga$ erit tempus per arcum AM $= \int \frac{dx}{\sqrt{gx}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{g}}$. Hoc ergo tempus aequatur tempori descensus per abscissam AP a quiete incepti.

Corollarium 5.

143. Si $b > \frac{1}{4}ga$ pressio fit negativa, tum igitur curua in plagam axi AP oppositam premittur. A si $b < \frac{1}{4}ga$ directio pressiois erit in MN. Quantitas vero pressiois in singulis curuae punctis erit reciproce vt radius osculi.

Exem-

Exemplum 2.

144. Si curua AM fuerit circulus; cuius radius $= a$, et centrum in verticali AP sit positum; erit $y^2 = 2ax - x^2$, vnde $dy = \frac{adx - xdx}{\sqrt{2ax - x^2}}$ et $ds = \frac{adx}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$. Erit ergo tempus, quo arcus AM percurritur $= \int \frac{adx}{\sqrt{(2ax - x^2)(b + gx)}}$. Atque cum sit $\frac{dx ddy}{ds^3} = \frac{1}{a}$, erit pressio, quam circulus in puncto M patitur $= g - \frac{gx}{a} - \frac{2(b+gx)}{a} = g - \frac{3gx}{a} - \frac{2b}{a}$.

Corollarium 6.

145. Tempus per logarithmos exprimi potest, si fuerit $b = 0$; fit autem $= \infty$, seu corpus perpetuo in A manebit. Id quod per supra tradita (97.) patet. Nam, quia curua in A est normalis in AP, neque radius osculi infinite paruus, corpus descendere non potest.

Corollarium 7.

146. Si est $b = \frac{ga}{2}$, seu celeritas initialis, tanta, quantam corpus acquirit cadendo ex altitudine dimidii radii circuli; pressio totalis cum vi centrifuga erit conspirans atque $= \frac{3gx}{a}$, erit itaque altitudini percursae proportionalis.

DEFINITIO 3.

147. Motus oscillatorius est motus recipro- Tabula V.
cus, quo corpus alternatim accedit et recedit Fig. 2.
ab initio motus M. Ita si corpus super curua
Tom. II. I MAN

MAN moueatur, primo descendet super MA, tum ascendet in AN, donec celeritatem amiserit; deinde ex N iterum descendet ascendetque in arcu AM, quo facto iterum descendet, hancque periodum continuabit: Atque talis motus oscillatorius vocatur.

Corollarium I.

148. Motus oscillatorius ergo consistit in alternis descensibus et ascensibus super linea curua; atque descensu motu accelerato mouetur, ascensu vero celeritatem acquisitam rursus perdit.

Corollarium 2.

149. Quilibet ergo descensus super eadem curuae parte fit, super qua praecedens ascensus contigit. Quare cum celeritas corporis ab altitudine tantum pendeat in vacuo, corpus in eodem curuae puncto siue in ascensu siue in descensu eandem habet celeritatem.

Corollarium 3.

150. Ex quo sequitur tempus descensus per MA, aequale esse tempori ascensus per AM; similique modo tempus ascensus per AN tempori descensus per NA.

Corollarium 4.

151. Corpus in arcu AN ascendens ad punctum N vsque perueniet, quod aequale altum est ac punctum M, ex quo erat delapsum. Sequitur hoc ex eo, quod celeritas per altitudinem tantum determinetur.

Co-

Corollarium 5.

152. Si curua AN similis et aequalis fuerit curuae AM, tum motus per AN aequalis erit motui per AM. Quare omnes ascensus et descensus aequalibus fient temporibus.

Corollarium 6.

153. Si curuae MA, AN fuerint dissimiles, tempus saltem per MAN aequale erit tempori per NAM, seu tempora accessionum et recessionum erunt inter se aequalia.

Corollarium 7.

154. Quia corpus semper ad eandem altitudinem pertinet, manifestum est hunc motum oscillatorium perpetuo durare debere.

Corollarium 8.

155. Curua ergo ad motum oscillatorium producendum apta est omnis curua, quae de puncto infimo A duos habet arcus ascendentes, vt MAN.

Scholion I.

156. Exposuimus hic proprietates motus oscillatorii, quales ex exposita hypothese potentiae sollicitantis vniformis et perpetuo deorsum tendentis consequuntur. Eaedem vero quoque locum habent, si potentia vtcunque ab altitudine pendeat, vel etiam ad fixum punctum dirigatur; id quod in sequentibus plenius apparebit. In medio resistente vero res aliter se habet,

nam neque ascensus per datam curuam similis est descensui per eandem, neque in ascensu corpus ad aequalem altitudinem pertingit ei, ex qua descensu erat delapsum.

Scholion 2.

157. Vocari solet motus per MAN itus sequens vero motus per NAM reditus, consistit ergo motus oscillatorius ex alternis itibus et reditibus. Oscillatio vero ab aliis vocatur motus ex itu et reditu constans, ab aliis tam itus quam reditus oscillatio vocatur. Hic priori sensu oscillationis vocem accipiemus, ita ut vna oscillatio ex vno itu vnoque reditu constet. Itus vero atque reditus vterque vno ascensu vnoque descensu consistit, atque ideo integra oscillatio duos ascensus duosque descensus complectetur. Cum igitur tempus itus aequale sit reditus tempori, erit tempus vnius oscillationis duplo maius quam tempus vnius itus seu reditus.

Corollarium 9.

158. In hoc ergo capite, in quo de motu in vacuo agitur, si motum oscillatorium examinare velimus, vel ascensus vel descensus solos super duabus curuae partibus AM, AN considerare opus habebimus.

Scholion 3.

159. Nihil refert vtrum arcus AM et AN vnā curuam continuam constituent, an vero sint diuersae curuae, dummodo in A ita sint con-

coniunctae, vt communem habeant tangentem : alias enim motus perturbaretur. Quare ad motum oscillatorium inquirendum tantum opus est, vt motus super curuis AM et AN seorsum definiamus. Sufficit enim hoc tum ad oscillationes determinandas, tum ad relationem inter maiores minoresque oscillationes inueniendam. Vocantur autem eae oscillationes maiores, quae maioribus arcubus absoluuntur, minores vero, quae minoribus.

Scholion 4.

160. Ex Prop. 6. §. 49. perspicitur, quomodo oscillationes ope pendulorum effici queant; scilicet ope euolutae curuaram AM et AN, circum quas filum circumducitur. Ab Hugenio etiam iste pendulorum vsus ad oscillationes accommodatur, vt vel ex eius instituto, quo eo motu ad horologia perficienda vtitur apparet. Eaedem vero difficultates, quas loco cit. commemorauimus, hic locum habent. Quamobrem motum puncti super datis lineis hic tantum inuestigabimus, mentemque ab omnibus pendulorum circumstantiis abducemus, quae nostrum institutum turbare possent.

PROPOSITIO 13.

Problema.

161. *Existente potentia sollicitante uniformi et deorsum directa, determinare tempus ascensus seu descensus per quemuis circuli arcum EA in puncto circuli infimo A terminatum.*

Tabula V,
Fig. 3.

Solutio.

Sit C circuli centrum, erit CA radius verticalis seu parallelus directioni potentiae g. Ponatur $AC=a$, et arcus AE altitudo $AG=b$, erit celeritas in infimo puncto A debita altitudini gb , quia corpus ex E descendens tantam habebit celeritatem, cum in A peruenerit. Atque tantam celeritatem corpus in A habere debet, vt ad E vsque ascendere possit. Consideretur quodvis arcus AE elementum Mm , et dicatur $AP=x$, erit $PM = \sqrt{(2ax-x^2)}$ et $Mm = \frac{adx}{\sqrt{(2ax-x^2)}}$. Celeritas vero in M erit debita altitudini g. $GP=gb-gx$. (93). Tempus igitur, quo elementum Mm siue ascensu siue descensu percurritur, erit $= \frac{adx}{\sqrt{g(b-x)(2ax-x^2)}}$. Quod quia integrari non potest per series eius integrale exprimemus. Est autem posito $2a=c$,

$$\frac{1}{\sqrt{(b-x)(2ax-x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{bc}} \left(x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \frac{x^2(b+c)}{bc} + \frac{x^3(3b^2+2bc+3c^2)}{8b^2b^2} \right. \\ \left. + \frac{x^5(5b^3+3b^2c+3c^2+5c^3)}{16b^3c^3} + \text{etc.} \right). \text{ Hoc ergo per } \frac{adx}{\sqrt{g}} \text{ multiplicatum et integratum dat tempus, quo} \\ \text{arcus A M absoluitur} = \frac{\sqrt{2ax}}{\sqrt{gb}} \left(1 + \frac{x(b+c)}{6bc} + \frac{x^2(3b^2+2bc+3c^2)}{40b^2c^2} + \frac{x^3(5b^3+3b^2c+3bc^2+5c^3)}{112b^3c^3} + \text{etc.} \right). \text{ To-} \\ \text{tum vero tempus per arcum EA prodibit, si fiat} \\ x=b, \text{ et ratio perispheriae ad diametrum} = \pi:1. \\ \text{quo posito habebitur, } \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{g}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi b}{8c} + \frac{9\pi b^2}{128c^2} + \text{etc.} \right) \\ = \frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}} \left(1 + \frac{b}{4c} + \frac{9b^2}{64c^2} + \text{etc.} \right). \text{ Vbi coefficientes}$$

tes

tes $1, \frac{1}{4}, \frac{9}{64}$ etc. sunt quadrata coefficientium $1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ qui prodeunt si $(1-z)^{-\frac{1}{2}}$ in seriem resoluitur. Ex hac igitur serie tempus vero proxime potest inueniri. Q. E. I.

Corollarium I.

162. Quo maior igitur arcus EA est, eo maius quoque erit tempus, quo is percurritur. Fit enim posito $b=2a=c$, tempus infinitum; quia corpus descensu semicirculum nequaquam describere potest.

Corollarium 2.

163. Si igitur corpus oscillatorio motu mouetur in arcu circuli EAF, erit tempus vnus itus vel reditus duplo maius, quam tempus vnus ascensus vel descensus, quia tempus per ANF aequale est tempori per AMG. Quare vnus itus reditusve tempus, seu tempus dimidia oscillationis erit $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}} (1 + \frac{b}{4c} + \frac{9b^2}{64c^2} + \text{etc.})$. Integra vero oscillatio tempore duplo maiore absoluetur.

Scholion I.

164. Series haec tempus exprimens statim hoc modo potest inueniri. Temporis elementum in hos factores resoluatur $\frac{adx}{\sqrt{g(bx-xx)}} \times \frac{1}{\sqrt{2a-x}}$, horumque posterior tantum in seriem commutetur scilicet hanc $\frac{1}{\sqrt{c}} + \frac{1 \cdot x}{2 \cdot c\sqrt{b}} + \frac{1 \cdot 3x^2}{2 \cdot 4c^2\sqrt{c}} + \text{etc.}$ posito $2a=c$ Quia autem post integrationem fit $x=b$ erit $\int \frac{dx}{\sqrt{(bx-x^2)}} = \pi$;

$$\begin{aligned}
&= \pi; \int \frac{x dx}{\sqrt{(bx-x^2)}} = \frac{1\pi b}{2}; \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(bx-x^2)}} = \frac{1.3.\pi b^2}{2.4}; \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(bx-x^2)}} \\
&= \frac{1.3.5.\pi b^3}{2.4.6}. \text{ etc. Ex quibus totum descensus tem-} \\
&\text{pus vt ante colligitur} = \frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{b}{c} + \frac{9}{64} \frac{b^2}{c^2} + \right. \\
&\left. \frac{225}{2304} \frac{b^3}{c^3} + \text{etc.} \right).
\end{aligned}$$

Scholion 2.

165. Quo appareat a cuiusnam aequationis constructione summatio seriei $1 + \frac{1}{4} \frac{b}{c} + \frac{9}{64} \frac{b^2}{c^2} +$ etc. pendeat, pono $\frac{b}{c} = \frac{tt}{1+tt}$ et summam seriei $= e^{\int \frac{qdt}{t}}$ denotante e numerum, cuius log. est = 1. His positis ex mea series summandi methodo in Comment. Acad. Petrop. Tom. VII. exposita inuenitur sequens aequatio $dq + \frac{q^2 dt}{t} = \frac{1 dt}{(1+tt)^2}$. Ex qua aequatione, si construi posset, inueniretur, q in t , indeque ipsa summa per t seu per $\frac{b}{c}$. Quia autem aequatio constructionem non admittit in se spectata, apparet eam tamen construi posse, quia summa seriei per tempora in circulo ope quadraturarum assignari potest. Data enim summa seriei ex ea constructio aequationis inuentae sequitur.

Corollarium 3.

166. Si arcus AE, in quo descensus vel ascensus absolvitur, ponitur infinite paruus, tempus per eum tamen non fit infinite paruum. Euanesce enim in expressione temporis tantum b . eritque tempus descensus vel ascensus per arcum AE euanescentem $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}$.

Co-

Corollarium 4.

167. Iuncta altera circuli parte AF cum AE oscillationes per arcum EAF evanescentem fient infinite parvae, tempore tamen absolventur finito. Scilicet tempus vnus itus vel reditus seu tempus vnus dimidia oscillationis erit $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}$.

Corollarium 5.

168. Tempora igitur huiusmodi oscillationum infinite paruarum sunt in ratione subduplicata composita ex directa radiorum et reciproca potentiarum sollicitantium.

Corollarium 6.

169. Haec eadem valent, si potentia sollicitans non fuerit vniformis. Nam vtcunque variabilis ponatur, tamen, dum in corpus super arcu infinite paruo motum agit, constantem habebit valorem.

Corollarium 7.

170. Intelligitur, etiamsi curua EAF non fuerit circulus sed curua quaecunque, tum etiam quae hic allata sunt ad oscillationes infinite paruas super hac curua pertinere. Tum vero loco radii *a* radius osculi huius curuae in puncto infimo A est accipiendus.

Corollarium 8.

171. Huiusmodi oscillationes super arcu infinite paruo EAF efficiuntur ope penduli, cuius longitudo est radius AC. Tempora igitur oscil-

lationum infinite paruarum pendulorum sunt directe vt radix quadrata ex longitudine penduli et reciproce vt radix quadrata ex potentia sollicitante.

Corollarium 9.

172. Si curua ANF non fuerit aequalis curuae AME pro oscillationibus infinite paruis radium osculi in A tantum considerare sufficit. Sit $\alpha = a$ erit tempus ascensus per arcum AF infinite paruum $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}$ atque cum tempus descensus per arcum AME euanescentem sit $\frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}$ erit tempus vnus itus seu dimidia oscillationis super curua composita EAE $= \frac{\pi(\sqrt{a} + \sqrt{a})}{\sqrt{2g}}$.

Corollarium 10.

173. Si oscillationes non fuerint infinite parvae super circulo BAD, tempora oscillationum maiora erunt, quo maiores sint oscillationum arcus. Atque si oscillationes tamen sint valde parvae, erit tempus talis oscillationis ad tempus oscillationis infinite parvae vt quadruplum diametri circuli sinu verso arcus percurſi auctum ad quadruplum diametri ipsum.

Corollarium 11.

174. Altitudo ex qua corpus eodem tempore ab eadem potentia g sollicitatum descendit, quo fit descensus per arcum EMA infinite paruum est $= \frac{\pi^2 a}{8}$; seu est ad octauam radii partem vt quadratum peripheriae circuli ad quadratum dia-

diametri; quam proxime ergo haec altitudo erit
 $= \frac{5}{4} a$.

Corollarium 12.

175. Super chorda autem arcus EMA corpus descendit tempore eodem, quo per diametrum circuli (102). Quare tempus descensus super chorda infinite parua est ad tempus descensus super arcu respondente vt $\frac{2\sqrt{2}a}{\sqrt{g}}$ ad $\frac{\pi\sqrt{2}a}{2\sqrt{g}}$ i. e. vt diameter ad quartam peripheriae partem. Atque tempus descensus ex diametro seu dupla penduli longitudine est ad tempus vnus integrae oscillationis infinite paruae ex itu et reditu compositae vt diameter ad peripheriam.

Scholion 3.

176. Si duo arcus circulares AE et FA super quibus coniunctis oscillationes peraguntur non sunt aequales, ope penduli hae oscillationes confici possunt, si in centro K arcus AF clauus infigatur, vt filum CA, postquam arcum EA circa centrum C descripsit, in K retineatur et circa centrum K arcum AF describat.

Tebula V.
Fig. 4.

PROPOSITIO 19.

Problema.

177. Data potentia sollicitante inuenire longitudinem penduli infinite paruas oscillationes conficientis, quod singulos itus redivisus vno minuto secundo absoluat.

K 2

So-

Solutio.

Existente a longitudine penduli quaesita et g potentia sollicitante, unitate vim gravitatis denotante, est tempus vnus dimidiaae oscillationis infinite paruae $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$. Haec vero expressio vt in minutis secundis habeatur, longitudo a in partibus millesimis pedis Rhenani est exprimenda, et formula $\frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$ per 250 diuidenda, vt ex primo Libro apparet. Quamobrem habebitur tempus vnus dimidiaae oscillationis $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{250\sqrt{g}}$ minut. sec. Quare, cum hoc tempus vnum minutum secundum esse debeat, erit $\pi\sqrt{2a} = 250\sqrt{g}$, atque $a = \frac{250^2 g}{\pi^2} = 3166\frac{1}{4}g$. part. mill. pedis Rhen. Haec ergo est longitudo penduli semioscillationes vno minuto secundo absoluentis. Q. E. I.

Corollarium I.

178. Longitudines ergo pendulorum eodem tempore oscillationes peragentium, sed a diuersis potentiis sollicitatorum, sunt in ipsarum potentiarum ratione.

Corollarium 2.

179. Si potentia sollicitans g aequalis est vi gravitatis 1, qui casus in oscillationes in superfi-
superficie terrae factas competit, erit penduli longitudo, quod itus reditusque singulos vno minuto secundo absoluit $= 3,16625$ pedum Rhenan. seu trium pedum cum sexta pedis parte.

Scho-

Scholion. I.

180. Apprime conuenit haec longitudo cum ea, quam Hugenius per experimenta inuenit; ex quo apparet nos in praecedente libro numerum 15625. scrup. ped. Rhen. recte pro altitudine, ex qua corpus vi grauitatis sollicitatum tempore vnius minuti secundi delabitur; assumfisse; ex hoc enim numero fuit numerus 250, per quem temporum expressiones dividi debent, vt minuta secunda praebeant. Cum igitur Hugenius longitudinis 3, 166. ped. tertiam partem pro pede vniuersali haberi velit, quippe cuius longitudo ubique terrarum per obseruationes potest determinari: continebit hic pes vniuersalis 1055 partes millesimas pedis Rhenani.

Scholion 2.

181. Obseruationibus vero hic pes vniuersalis sequenti modo commodissime determinatur. Sumatur pendulum longitudinis f , quod ad minimas oscillationes faciendas impellatur, numerenturque eius dimidiaae oscillationes tempore vnius horae, earumque numerus sit n , ita vt vna semioscillatio absoluator tempore $\frac{3600}{n}$ min. secund. Sit iam longitudo penduli semioscillationes minutis secundis absoluentis 2. Quare cum tempora oscillationum diuerforum pendulorum ab eadem potentia sollicitatorum sint in subduplicata ratione pendulorum (171.); erit $\frac{3600}{n} : 1 = \sqrt{f} : \sqrt{2}$ ideoque

K 3

que

que $z = \frac{\pi^2 f}{12960000}$ et consequenter pes vniuersalis = $\frac{\pi^2 f}{38880000}$.

Corollarium 3.

182. Pendulum igitur quadruplo longius quam $3166\frac{1}{4}$ scrup. pedis Rhenani semioscillationes duobus minutis secundis absoluet; quia tempora oscillationum sunt in subduplicata ratione longitudinum pendulorum.

Corollarium 4.

183. Cum semidiameter telluris sit 20382230 ped. Rhen. si tantae longitudinis pendulum concipiatur, durabit eius vna semioscillatio 2536 min. secunda. Quare in horis 24 prope 17 oscillationes integras absoluet.

Corollarium 3.

185. Quia tempus dimidiaae oscillationis est $\frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$, erit tempus integrae oscillationis $\frac{2\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$. At huic tempori aequale est tempus reuolutionis in peripheria circuli radii a a corpore motu libero peractae, quod ad centrum circuli vrgetur vi $=g$, vt ex praeced. Libro apparet. Hanc ob rem tempus vnus oscillationis integrae penduli semidiametro terrae aequalis aequatur tempori, quo corpus proiectum in superficie terrae vnam reuolutionem perageret. Ostendit vero quoque Hugenius corpus hoc modo motum tempore 24 horarum fere 17 reuolutiones esse absoluturum.

Co-

Corollarium 6.

186. Cum vis grauitatis sit ad vim qua corpus in superficie solis ad centrum solis vrgetur, vt 1000 ad 41; erit longitudo penduli, quod in superficie solis semioscillationes minuto secundo absoluit $= 77, 226$ ped. Rhenan. Simili modo ob grauitatem in superficie Iouis $= \frac{127}{82}$, tale pendulum longum erit 6, 448 ped. Atque in superficie Saturni ob grauitatem $= \frac{105}{82}$ talis penduli longitudo erit 4, 054 ped.

PROPOSITIO 20.

Problema.

187. Si fuerit curua BAD, super qua fiunt oscillationes, cyclois circulo diametri AC super basi horizontali BD descripta; determinare tempus oscillationis per quemque arcum EAF, existente potentia sollicitante uniformi et deorsum tendente.

Tabula V.
Fig. 5.

Solutio.

Sit radius osculi in A nempe $AO=a$, qui est duplum diametri circuli generatoris AC, erit ergo $AC=\frac{1}{2}a$ et posita abscissa $AP=x$, et arcu respondente $AM=s$, erit ex natura cycloidis $s^2=2ax$. Sit iam abscissa arcui EAE, qui motu oscillatorio percurritur, respondens $AG=b$, erit celeritas in puncto infimo A debita altitudini gb , et celeritas in M debita altitudini $g(b-x)$. Quare cum sit $ds = \frac{adx}{\sqrt{2ax}}$ erit tempus, quo arcus AM per-

percurritur $= \int \frac{dx \sqrt{2a}}{2\sqrt{g}(bx-x^2)} = \frac{\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}} \int \frac{dx}{\sqrt{(bx-xx)}}$. Est vero si post integrationem ponatur $x=b$, quo tempus per totum arcum AE prodeat, $\int \frac{dx}{\sqrt{(bx-xx)}} = \pi$, seu peripheria circuli per diametrum diuisa. Quare tempus vnus ascensus vel descensus est $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}$, et tempus vnus itus vel reditus per arcum EAF erit $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$. Atque tempus vnus integrae oscillationis erit $= \frac{2\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$. Q. E. I.

Corollarium I.

183. Quia in hanc temporis expressionem littera b , quae quantitatem arcus EAF determinat, non ingreditur, omnium oscillationum tempora, quae super eadem cycloide perficiuntur, sunt inter se aequalia.

Corollarium 2.

189. Tempus ergo vnus cuiusque oscillationis erit aequale tempori oscillationis per arculum infinite paruum. At arculus infinite paruus congruit cum arculo circuli radio OA descripti. Quare tempus cuiusque oscillationis super cycloide BAD aequale erit tempori, quo pendulum longitudinis a oscillationem minimam absoluit. Id quod etiam ex praecedente Propos. elucet, tempus enim minimae oscillationis penduli a est $= \frac{2\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$ (167.), qua eadem formula tempus vnus oscillationis integrae super cycloide expressum inuenimus.

Co-

Corollarium 3.

190. Si igitur pendulum ita adaptetur, vt corpus oscillans in cycloide moueatur; omnes eius oscillationes siue fuerint magnae siue paruae aequalibus absoluentur temporibus. Quare si AO fuerit $= 3166\frac{1}{4}g$ scrup. pedis Rhen. singulae semi-oscillationes minuto secundo absoluentur.

Corollarium 4.

191. Omnes igitur descensus super cycloide ad punctum infimum A sunt aequitemporanei seu isochroni; item omnes ascensus ex puncto infimo A donec celeritas fuerit absumta. Tempus vero vnus ascensus vel descensus est $\frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}$.

Scholion I.

192. Propter hanc proprietatem cyclois tautochronae nomine appellari solet, quia omnes oscillationes super ea eodem tempore absoluuntur. Hugenus primus hanc eximiam cycloidis proprietatem detexit, statimque cogitauit de cycloide in locum circuli substituenda in oscillationibus, id quod in horologiis effecit. Nunc tamen horologiorum artifices hunc oscillandi modum rursus deseruerunt, quod eius vsum nimis exiguum comperuerint. Atque certe in vacuo quaelibet curua oscillationes isochronas producit, quia perpetuo eiusdem magnitudinis existunt. In medio resistente vero, quo oscillationes decrescunt, cy-

Tom. II. L clois

clois hanc proprietatem amittit, ideoque nullius est vtilitatis.

Scholion 2.

Tabula V.
Fig. 2.

193. Intelligitur etiam, si duae cycloides AE et AF dissimiles in punctis infimis iungantur, oscillationes super curua composita EAF aequalibus temporibus absolui. Nam cum super vtraque tempora ascensus vel descensus sint constantis quantitatis, etiam summae eorum nempe tempora semioscillationum et integrarum oscillationum inter se erunt aequalia. Sit duplum diametri circuli generantis cycloidem AF = a erit tempus vnus ascensus vel descensus super AF = $\frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}$. Quare itus reditusve super curua composita EAF absoluetur tempore = $\frac{\pi(\sqrt{2a} + \sqrt{2a})}{2\sqrt{g}}$; integra vero oscillatio tempore $\frac{2\pi(\sqrt{a} + \sqrt{a})}{\sqrt{g}}$.

Scholion 3.

194. Ordo requireret, vt antequam ad alias potentiae sollicitantis directiones progrediamur, effectus potentiae, cuius directiones sint adhuc parallelae, sed variabiles euolueremus, motumque corporis a huiusmodi potentia sollicitati super data curua inuestigaremus. Sed cum exempla motum notatu dignum continentia nobis adhuc lateant, atque principia, quorum ope motus super quaque curua cognoscitur, iam sint exposita, plenior tractationem eo differemus, vbi curuas sumus

sumus inuestigaturi, super quibus corpus a huiusmodi potentiis sollicitatum, data lege incedat.

PROPOSITIO 21.

Problema

196. Si corpus perpetuo vi quacunque ad centrum fixum C trabatur, atque super data curua AM moueatur; determinare motum corporis super hac linea, et pressionem, quam curua in singulis punctis sustinet.

Tabula V.
Fig. 6.

Solutio.

Sit corporis celeritas initialis in A debita altitudini b , et puncti A a centro C distantia $AC = a$. Celeritas vero corporis in quocunque curuae loco M debita sit altitudini v , et vis, qua corpus in M versus C sollicitatur sit $= P$, existente vi grauitatis corporis moti $= 1$. Dicatur distantia MC, y , et arcus AM, s ; erit elementum $Mm = ds$ et $Mn = -dy$. Centro C describantur arcus circulares MP, mp ; erit $AP = a - y$, $Pp = Mn = -dy$. Iam ducta tangente MT in eamque perpendicularo CT, erit $MC : MT = Mm : Mn$; et $MC : CT = Mm : mn$, vnde erit $MT = \frac{ydy}{ds}$ et $CT = \frac{y\sqrt{(ds^2 - dy^2)}}{ds}$. Ex quibus, si vis centripeta in tangentialem secundum MT et normalem secundum MO resolvatur, erit vis tangentialis $= -\frac{Pdy}{ds}$ et normalis $= \frac{P\sqrt{(ds^2 - dy^2)}}{ds}$. Ex vi tangentiali ergo habebitur $dv = -Pdy$. Ponatur interuallum AP

L 2

$= x,$

$=x$, quo corpus propius ad centrum accessit, erit $a-y=x$ et $dx=-dy$. Quare erit $dv=Pdx$, et si P a distantia MC pendeat, poterit $\int Pdx$ exhiberi. Ita igitur integrali $\int Pdx$ accepto, ut evanescat posito $x=0$, erit $v=b+\int Pdx$. Ex quo tempus per arcum AM erit $=\int \frac{ds}{\sqrt{b+\int Pdx}}$. Vis normalis $\frac{P\sqrt{(ds^2-dy^2)}}{ds}$ tota in pressione curvae secundum MO insumitur. Quo igitur haec commodius exponatur et cum vi centrifuga simul exhibeatur, pono perpendicularum $CT=p$, erit vis normalis $=\frac{Pp}{y}$. Deinde radius osculi MO erit $=\frac{ydy}{dp}$, ex quo habetur vis centrifuga $=\frac{2vdp}{ydy}==\frac{2dp(b+\int Pdx)}{ydy}$, cuius effectus effectui vis normalis est contrarius. Quamobrem curua in M versus MO premetur vi $=\frac{Ppdy-2bdp-2dp\int Pdx}{ydy}$. Q. E. I.

Corollarium I.

196. Si igitur vis P a distantia y tantum pendeat, ita ut corpus in aequalibus a centro distantis aequaliter vrgeatur, celeritas corporis a distantia quoque tantum pendebit, atque corpus super curua AM motum in aequalibus a centro distantis aequales habebit celeritates.

Corollarium 2.

197. Atque in quouis puncto M celeritas tanta erit, quantam idem corpus acquireret, si eadem celeritate initiali \sqrt{b} ex A per interval-
lum

Ium AP descenderet, existente nimirum $CP = CM$.

Corollarium 3.

198. Etiamfi igitur ipsa curua AM sit incognita; tamen corporis super ea moti in quaque a centro C distantia celeritas potest assignari. Est nempe pro distantia y , $v = b + \int P dx$, existente $x = a - y$.

Corollarium 4.

199. Si curua AM fuerit talis, vt pressio, quam corpus in eam exercet, sit nulla, erit curua ea ipsa, quam corpus motum in A celeritate \sqrt{b} inchoans libere describeret. Erit itaque pro motu libero $Pp dy = 2b dp + 2dp \int P dx$. seu ob $dx = -dy$, habebitur $Pp dy + 2dp \int P dy = 2b dp$. Cuius integralis est $p^2 \int P dy = bp^2 - bb^2$ existente b perpendicularo ex C in tangentem in A demisso. Ex his aequationibus invenitur $P = \frac{2bb^2 dp}{p^3 dy}$ uti praeced. Libro pro motu libero inuenimus.

Corollarium 5.

200. In motu igitur super quacunque curua AM , pressio, quam curua in M secundum MO sustinet, est $= \frac{\text{diff. } p^2(b + \int P dx)}{p y dy} = \frac{\text{diff. } p^2(b + \int P dx)}{p dx(a - x)} = \frac{\text{diff. } p^2 v}{p dx(a - x)}$.

Exemplum I.

201. Sit curua AM circulus centrum in C habens; erit motus corporis vniformis, propter

eandem eius perpetuo a centro virium C distantiam. Quare erit $v=b$ et $\int P dx = 0$, atque tempus per $AM = \frac{s}{\sqrt{b}} = \frac{AM}{\sqrt{b}}$. Deinde cum sit $y=a$ erit et $p=a$ et $dp=dy$. Quamobrem pressio, quam curua secundum MO seu versus centrum C sustinet, prodibit $=P-\frac{2b}{a}$. Ex quo perspicitur, si fuerit $b=\frac{Pa}{2}$ corpus libere per hunc circulum motum iri.

Exemplum 2.

202. Sit vis centripeta P potestati cuicunque distantiarum y proportionalis seu $P=\frac{y^n}{f^n}$ et curua AM spiralis logarithmica circa centrum C, ita vt sit $p=my$, et $dp=mdy$, atque $ds=\frac{dy}{\sqrt{(1-m^2)}}$. Erit ergo $v=b+\int \frac{y^n dx}{f^n} = \frac{a^{n+1}-y^{n+1}+(n+1)bf^n}{(n+1)f^n}$ atque tempus per arcum AM $= \frac{\sqrt{(n+1)} f^n}{\sqrt{(1-m^2)}}$ $\int \frac{dy}{\sqrt{(a^{n+1}-y^{n+1}+(n+1)bf^n)}}$. Pressio vero, quam curua secundum MO sustinet, erit $= \frac{m(n+3)y^n}{(n+1)f^n} - \frac{2mb}{y} - \frac{2ma^{n+1}}{(n+1)f^ny}$.

Corollarium 6.

203. Corpus igitur cum in centrum C pervenerit, celeritatem habebit finitam, si $n+1$ est numerus affirmativus, altitudo enim isti celeritati debita est $\frac{a^{n+1}}{(n+1)f^n} + b$. At si $n+1$ est numerus negativus vel etiam $=0$ celeritas corporis in C erit infinite magna.

Corollarium 7.

204. In ipso vero centro corpus vi infinita premetur directione a centro tendente, seu vis centrifuga praevalebit, si fuerit $n > -3$. At si $n \leq -3$, tunc vis normalis praevalebit, atque curva vi infinita versus centrum premetur.

PROPOSITIO 22.

Problema.

205. Si corpus perpetuo vi centripeta ad centrum virium C trabatur, dataque sit curva EAF ad oscillandum idonea, determinare motum oscillatorium corporis super hac curva.

Tabula VI.
Fig. 1.

Solutio.

Sit vis centripeta functioni cuicunque distantiarum a centro C proportionalis; erit celeritas corporis in aequalibus a centro C distantis, ut M et N, eadem. In E vero et F celeritas corporis sit nulla, maxima vero erit in puncto

cur-

curuae A centro C proximo, ducaturque recta CAO. Corpus ergo per arcum EAF oscillationes absoluet, ad quas definiendas motum corporis super vtraque curua AE et AF inuestigare sufficit. Sit celeritas corporis maxima, quam habet in A debita altitudini b , et celeritas in quocunque puncto M debita altitudini v . Ponatur distantia CM, cui aequalis sit CP, $=y$, et vis centripeta in M $=P$. Sit CA $=a$ et AP $=x$, atque AG $=k$, sumta CG $=CE$, erit $y=a+x$ et CG $=CE=a+k$. Posito arcu AM $=s$, erit tangens MC, quam perpendicularum ex C in eam demissum determinat $=\frac{y dy}{ds}$, ideoque vis tangentialis $=\frac{P dy}{ds}$, quae motui corporis crescente y est contraria: vnde habebitur $dv = -Pdy = -Pdx$ et $v = b - \int Pdx$; integrali $\int Pdx$ ita accepto, vt euanescat posito $x=0$. Si igitur ponatur $v=0$, dabit ex aequatione $b = \int Pdx$ valor ipsius x erutus interuallum AG seu k . Tempus ergo, quo arcus AM percurritur, est $= \int \frac{ds}{\sqrt{b - \int Pdx}}$, ex quo tempus per totum arcum AE prodibit, si post integrationem ita institutam, vt integrale euanescat posito $x=k$, seu $\int Pdx = b$. Simili modo tempus per arcum AF inuenietur, quo igitur inuento summa horum temporum dabit tempus vnus semioscillationis. Q. E. I.

Corollarium I.

206. Si curua AF similis et aequalis fuerit curuae AE tempora per vtramque erunt aequalia,

lia, atque ideo tempus vnus semioscillationi^s aequabitur duplo tempori per AE.

Exemplum I.

207. Si arcus EAF fuerit infinite paruus, potentia sollicitans P ob distantiam a centro E inuariabilem, erit constans = g . Sit radius osculi curuae in A seu $AO = b$, erit AE arcus circuli hoc radio descriptus. At ex natura circuli

erit $CT = \frac{a^2 + 2ab - y^2}{2b}$ et $MT = \frac{\sqrt{(4b^2y^2 - a^4 - 4a^3b - 4a^2b^2 + 2a^2y^2 + 4aby^2 - y^4)}}{2b}$. Sed ob $y = a + x$

et x respectu a et b infinite paruum erit $MT = \frac{\sqrt{2abx(a+b)}}{b}$ et $ds = \frac{bydy}{\sqrt{2abx(a+b)}} = \frac{b(a+x)dx}{\sqrt{2agx(a+k)}} =$

$\frac{dx\sqrt{ab}}{\sqrt{2(a+b)x}}$. At cum sit $v = b - gx$, ideoque $b = gk$; habebimus $v = g(k - x)$ atque elementum

temporis = $\frac{dx\sqrt{ab}}{\sqrt{2g(a+b)(kx-x^2)}}$. At $\int \frac{dx}{\sqrt{(kx-x^2)}}$ posito $x = k \sin \theta$ fit $= \pi$ peripheriae circuli existente diametro

I. Consequenter tempus per arcum AE infinite paruum est $= \frac{\pi\sqrt{ab}}{\sqrt{2g(a+b)}} = \frac{\pi\sqrt{2ab}}{2\sqrt{g(a+b)}}$.

Corollarium 2.

208. Si centrum virium infinite distet, vt esset $a = \infty$ erit potentiae directio sibi parallela, ideoque vt supra erit tempus, quo arcus AE absoluitur $= \frac{\pi\sqrt{2b}}{2\sqrt{g}}$. At si arcus circuli EA fit linea recta, seu $b = \infty$, erit tempus per EA $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}$.

Tom. II.

M

Co.

Corollarium 3.

209. Si ergo hic casus comparetur cum oscillationibus penduli a potentia g quoque sed directiones sibi parallelas habente sollicitati, erit penduli isochroni longitudo $= \frac{ab}{a+b}$. Tempus enim vnus descensus seu ascensus huius penduli est $= \frac{\pi \sqrt{2ab}}{2\sqrt{g(a+b)}} (166.)$.

Exemplum 2.

Tabula VI.
Fig. 4.

210. Sit iam vis centripeta potestati cuicunque distantiarum proportionalis seu $P = \frac{y^n}{f^n}$, et linea EF recta. Erit $AM = s = \sqrt{y^2 - a^2}$ et $x = y - a$. Erit autem porro $x = b - \int \frac{y^n dy}{f^n} = b + \frac{a^{n+1} - y^{n+1}}{(n+1)f^n}$; positoque $v = 0$ fiet $y^{n+1} = a^{n+1} + (n+1)bf^n = (a+k)^{n+1}$. Vel dicta CE = c erit $b = \frac{c^{n+1} - a^{n+1}}{(n+1)f^n}$, et $v = \frac{c^{n+1} - y^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Consequenter ob $ds = \frac{y dy}{\sqrt{y^2 - a^2}}$ habebitur tempus per AM $= \int \frac{y dy \sqrt{(n+1)f^n}}{\sqrt{(y^2 - a^2)(c^{n+1} - y^{n+1})}}$. Quod integrale ita est accipiendum, vt fiat $= 0$ posito $y = a$. Tumque facto $y = c$ habebitur tempus per lineam EA. Semioscillatio vero seu motus per EAF aequabitur duplo huius temporis.

Co-

Corollarium 4.

211. Ponatur vis centripeta distantiiis proportionalis seu $n=1$ erit tempus per AM $= \int \frac{y dy \sqrt{2f}}{\sqrt{(y^2-a^2)(c^2-y^2)}}$ seu posito $AE=i$ ob $e^2=a^2+i^2$ et $y^2=a^2+s^2$ erit tempus per AM $= \int \frac{ds \sqrt{2f}}{\sqrt{(i^2-s^2)}}$, unde tempus per AE erit $= \frac{\pi \sqrt{2f}}{2}$. Omnes igitur oscillationes super hac recta absoluuntur eodem tempore, dimidia nimirum oscillatio tempore $\pi \sqrt{2f}$ conficietur.

Corollarium 5.

212. Si oscillatio est infinite parua, tempus vnus semioscillationis super recta erit quoque $\pi \sqrt{2f}$, at cum vis centripeta tum vt constans considerari possit, sit ea $=g$, erit $\frac{a}{f}=g$, ideoque tempus vnus semioscillationis $= \frac{\pi \sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$ vt supra §. 208.

Corollarium 6.

213. Quia directiones grauitatis reuera convergunt ad centrum terrae, corpus in superficie telluris super recta perfecte horizontali oscillationes peragere posset, nisi resistentia et frictiones impedirent. Tempus autem vnus semioscillationis talis foret (ob a = semid. terrae et $g=1$) 2537. minut. secund. (183.)

PROPOSITIO 23.

Problema.

Tebula VI.
Fig. 3.

214. Si corpus sollicitetur a duabus quibuscunque potentiis, quarum alterius directio sit verticalis MQ, alterius horizontalis MP: definire motum corporis ab istis viribus sollicitati super data curua AMB.

Solutio.

Sit celeritas in B nulla, in M debita altitudini v . Vis sollicitans secundum MQ sit $= P$, et ea secundum MP $= Q$. Ponatur BR $= t$, RM $= z$, arcus BM $= w$, quas litteras ad descensum corporis ex quiete ex B adhibebimus. At pro ascensu ex A quacunque cum celeritate initiali, qui motus ad oscillationes referetur, sit AP $= x = QM$; PM $= AQ = y$ et arcus AM $= s$, celeritas vero corporis in A debita sit altitudini b ; erit ergo $t + x = \text{const.}$ item $z + y = \text{const.}$ et $w + z = \text{const.}$ vnde $dt + dx = 0$ et $dw + dz = 0$. Resolutis potentiis P et Q in normales et tangentiales, erit vis tangentialis ex P orta $= \frac{Pdt}{dw}$ et vis normalis ex P orta $= \frac{Pdz}{dw}$ trahens secundum MN. Deinde erit vis tangentialis ex Q orta $= \frac{Qdz}{dw}$ et normalis ex Q $= \frac{Qdt}{dw}$ quae illi normali est contraria. Vtraque vis tangentialis motum per BM accelerat, ideoque erit $dv = Pdt + Qdz$, et $v = \int Pdt + \int Qdz$ his integralibus ita

ac.

acceptis, vt euanescent factis t et $z = 0$. Atque pro ascensu ex A erit $v = b - \int P dx - \int Q dy$, his integralibus ita sumtis, vt euanescent positis x et $y = 0$. Positis igitur in illa aequatione $v = \int P dt + \int Q dz$, $t = BD$ et $z = AD$ fiet $v = b$. Quare tempus per BM erit $= \int \frac{dw}{\sqrt{(\int P dt + \int Q dz)}}$ et tempus per AM $= \int \frac{ds}{\sqrt{(b - \int P dx - \int Q dy)}}$. Sumto elemento dt vel dx constante erit radius osculi curuae in M $= \frac{dw^3}{dt \, d^2z}$; atque vis centrifuga cuius directio secundum MN est $= \frac{2 \, dt \, ddz (\int P dt + \int Q dz)}{dw^3}$. Totalis ergo vis, qua curua in M secundum MN premittur est $= \frac{Pdz - Qdt}{dw} + \frac{2 \, dt \, ddz (\int P dt + \int Q dz)}{dw^3}$. Q E. I.

Corollarium I.

215. Si P est functio ipsius x vel t , quaecunque, et Q functio ipsius y vel z quaecunque, tam Pdx quam Qdy integrari poterunt; atque ideo celeritas v poterit exhiberi, et ope aequationis pro curua tempus quoque.

Corollarium 2.

216. Quia quaecunque et quotcunque potentiae sollicitantes, si modo earum directiones sint in eo plano, in quo est curua AMB, in huiusmodi duas potentias possunt resolui, haec propositio latissime patet et omnes casus complectitur, quibus potentialium directiones et curua sunt in eodem plano.

Scholion.

217. Patet etiam haec propositio latius, si pauca adiiciantur, et comprehendit casus, quibus non omnes potentiarum directiones sunt in plano curvae. Tum enim hae potentiae in binas sunt resoluendae, quarum alterae sint in ipso curvae plano, alterae ad hoc planum normales. Illae igitur in plano curvae sitae eodem modo, quo in propositione usi sumus, tractatae dabunt accelerationem corporis et pressionem secundum MN; alterae potentiae, quia normales sunt in curvam, in curva premenda tantum insumentur. Quare hinc duplex nascetur pressio, quam curva sustinet, altera secundum MN directa, altera ad planum curvae normalis. Harum igitur duarum pressionum, si media sumatur directio prodibit directio potentiae aequivalentis, in qua curva premitur. Quamobrem non est opus, ut huiusmodi casus evoluamus, sed paucis attingemus motum corporum super curva, quae ipsa non est in plano sita, ubi potentiam sollicitantem constantem et deorsum tendentem ponemus.

PROPOSITIO 24.

Problema.

Tabula VI.
Fig. 4.

218. *Existente potentia sollicitante uniformi, eiusque directione recta deorsum tendente, determinare motum corporis super curva quacunque A M non in eodem plano constituta.*

So-

Solutio.

Sit curua A Q projectio curuae AM in plano horizontali, demissisque ex punctis quibusque proximis M et *m* in hoc planum perpendicularis MQ et *m*q, ducantur ad axem pro lubitu assumptum AP normales QP et *qp*; ponanturque AP = *x*, PQ = *y*, et QM = *z*. Sit corporis celeritas in A debita altitudini *b*, celeritas in M debita altitudini *v*. Potentia vero sit = *g*, qua corpus in M secundum MQ sollicitatur. Ducta tangente MT, et in eam ex Q perpendiculari QT, resoluatur potentia *g* in tangentialem et normalem. Erit ob MQ: MT = $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$: *dz* vis tangentialis $\frac{g dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}$. Atque ob MQ: QT = $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$: $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ vis normalis = $\frac{g \sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}$.

Quia autem vis tangentialis motum retardat erit $dv = -g dz$ et $v = b - g z$, vnde tempus, quo arcus AM absoluetur, prodit = $\int \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{\sqrt{b - g z}}$. Vis normalis vero efficiet, vt curua in M a corpore tanta vi prematur iuxta directionem ad M *m* normalem et in plano QM *m*q fitam. Premitur vero curua praeterea a vi centrifuga secundum directionem positioni radii osculi oppositam vi = $\frac{2(b - g z)}{r}$, designante *r* radium osculi curuae in M. Inuenimus autem supra §. 71. positionem radii osculi, ex qua proinde directio vis centrifugae innotescit. Quantitas vero vis centrifugae dabitur ex radio osculi, qui §. 72. est inuentus; est nempe $r =$

$$\frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(dx^2(dy^2 + dz^2) + (dyddz - dzddy)^2)}}. \quad Q. E. I.$$

Co-

Corollarium 1.

219. Celeritas igitur corporis hoc quoque casu ab altitudine tantum pendet. Atque celeritas in M tanta est, quantam corpus per QM ascendens cum celeritate in Q altitudini b debita in M haberet.

Corollarium 2.

220. Non poterit ergo corpus ad maiorem altitudinem ascendere, quam ad $\frac{b}{g}$. Nam si est $b - gz = 0$, corpus in ea altitudine omnem celeritatem amisit, iterumque descendet.

Corollarium 3.

221. Intelligitur etiam, si potentia non constans fuisset accepta, sed variabilis P ; tum inuentam fuisse celeritatem in M debitam altitudini $b - \int P dz$.

Scholion 1.

Tabula VI.
Fig. 5.

222. Si in plano verticali concipiatur curua AM ad axem horizontalem AQ relata; fueritque $AQ =$ curuae AQ praec. Fig. et $QM = QM$ praec. Fig. erit quoque curua AM aequalis curuae AM praec. Fig. Si iam corpus super curua AM ascendat celeritate initiali in A debita altitudini b , et ab eadem potentia g sollicitatum, habebit in M quoque celeritatem altitudini $b - gz$ debitam. Atque ideo tempus quoque ascensus per AM congruet cum tempore ascensus per AM in praeced. Fig. Hac igitur ratione motus corporis super curua non in eodem plano sita reduci potest ad motum super curua

curua in eodem plano posita. Inter motus enim ipsos nullum erit discrimen; at pressiones, quas hae duae curuae sufferunt, erunt diuersae. Quamobrem hoc modo pressio vt libet poterit variari manente motu corporis super curua eodem.

Scholion 2.

223. Posuimus haecenus curuam, super qua corpus mouetur, et potentiam sollicitantem vna cum directione datas, ex iisque motum corporis et pressionem curuae deduximus. Nunc igitur cum haec sufficere possint, ad alias quaestiones progrediemur, in quibus alia pro datis accipiuntur, reliquae sunt inueniendae. Et primo quidem data sit pressio in singulis curuae punctis et potentia sollicitans; ex quibus ipsa curua et motus super ea debeat inueniri. Deinde aliis factis combinationibus inter eas res, quae in computum veniunt, alias quaestiones formabimus.

PROPOSITIO 25.

Problema.

224. *Si corpus a quacunque vi perpetuo deorsum trabatur; inuenire curuam AM, quam corpus super ea descendens ubique aequaliter premit.*

Tabula VII,
Fig. I.

Solutio.

Sit AM curua quaesita, dicatur super axe verticali abscissa $AP = x$, applicata $PM = y$ et curua $AM = s$. Sit porro vis corpus in M sollicitans $= P$; et altitudo debita celeritati in $A = b$;

Tom. II.

N

erit

erit altitudo debita celeritati in $M = b + \int P dx$, integrali $\int P dx$ ita sumto, vt euanescat facto $x=0$. His positis erit pressio, quam curua secundum normalem MN sustinet (83) $= \frac{P dy}{ds} + \frac{2(b + \int P dx) dx ddy}{ds^3}$, sumto elemento dx pro constante. Iam cum haec pressio debeat esse constans, ponatur $ea = k$, erit $k ds^3 = P ds^2 dy + 2 b dx ddy + 2 dx ddy \int P dx$. At si ponatur ds constans, habebitur $k ds dx = P dx dy + 2 b ddy + 2 ddy \int P dx$, cuius integralis est $\frac{2 dy \sqrt{(b + \int P dx)}}{ds} = \int \frac{k dx}{\sqrt{(b + \int P dx)}}$. Quae aequatio cum P per x detur, constitui potest; quia y in eam non ingreditur sed tantum dy . Q. E. I.

Corollarium I.

225. Exprimit $\int \frac{dx}{\sqrt{(b + \int P dx)}}$ tempus, quo corpus ex A celeritate initiali eadem, qua per AM mouetur, per altitudinem AP delabitur, et $\sqrt{(b + \int P dx)}$ dat celeritatem in eodem loco. Quare celeritas haec in P per tempus per AP diuisa, dat $\frac{k ds}{2 dy}$, ex qua proprietate curua AM determinatur.

Corollarium 2.

226. Tempus autem per AP quantitate constante quacunque puta \sqrt{c} potest augeri. Hacque quantitate constante angulus, quem curua in A cum AP constituit, determinatur. Erit scilicet finis huius anguli $= \frac{k \sqrt{c}}{2 \sqrt{b}}$ posito sinu toto $= 1$. Quare \sqrt{c} maior non potest accipi quam $\frac{2 \sqrt{b}}{k}$; ideoque

que si motus in A a quiete incipit c debet esse $=0$.

Exemplum.

227. Sit potentia vniformis seu $P=g$, erit

$$\int \frac{k dx}{\sqrt{(b+gx)}} = \frac{2k\sqrt{(b+gx)} - 2k\sqrt{b} + 2k\sqrt{c}}{g} = \frac{2dy\sqrt{(b+gx)}}{ds}, \text{ vn-}$$

de habetur $\frac{dy}{ds} = \frac{k}{g} + \frac{k(\sqrt{c}-\sqrt{b})}{g\sqrt{(b+gx)}}$ atque $g dy \sqrt{(b+gx)}$

$$= k ds \sqrt{(b+gx)} + k ds (\sqrt{c}-\sqrt{b}). \text{ Ex qua oriatur}$$

$$\text{sequens aequatio } dy = \frac{k dx (\sqrt{(b+gx)} + \sqrt{c}-\sqrt{b})}{\sqrt{(g^2(b+gx) - k^2(\sqrt{(b+gx)} + \sqrt{c}-\sqrt{b})^2)}}.$$

$$\text{Sit } \sqrt{(b+gx)} = t \text{ et } -\sqrt{c} + \sqrt{b} = b, \text{ erit } x = \frac{t^2 - b}{g}$$

$$\text{et } dx = \frac{2 t dt}{g}. \text{ His igitur substitutio habebitur } dy =$$

$$\frac{2 k t dt (t - b)}{g \sqrt{(g^2 t^2 - k^2 t^2 + 2 k^2 b t - k^2 b^2)}}. \text{ Haec aequatio tribus casibus}$$

integrationem admittit, quorum primus est, si $k=0$, tum enim inuenitur curua, quam corpus in A pro-

iectum libere describit. Alter est casus, quando

$b=0$, seu $\sqrt{b}=\sqrt{c}$, tum enim habetur $\frac{dy}{ds} = \frac{k}{g}$,

seu linea satisfaciens erit recta inclinata. Si ter-

tio $k=g$, seu si tota pressio aequatur vbique vi sol-

licitanti corpus g ; erit $dy = \frac{2 t dt - 2 b t dt}{g \sqrt{(2 b t - b^2)}}$, cuius

integralis est $gy = \frac{(2 t t - 2 b t - 2 b^2)}{5 b} \sqrt{(2 b t - b^2)} + \text{const.}$

Constans haec, quia posito $x=0$ seu $t=\sqrt{b}$, fit y

$=0$, debet esse $= \frac{(2 b^2 + 2 b \sqrt{b} - 2 b)}{5 b} \sqrt{(2 b \sqrt{b} - b^2)}$. Re-

stituto ergo $\sqrt{(b+gx)}$ loco t et posito $\sqrt{b}-\sqrt{c}=$

$b=\sqrt{a}$ habebitur $\frac{5 g y \sqrt{a}}{2} = (b+gx-a-\sqrt{a}(b+gx)) \sqrt{(2 \sqrt{a}$

$(b+gx)-a) + (a-b+\sqrt{a} b) \sqrt{(2 \sqrt{a} b - a)}$. Quae est aequa-

tio pro curua quaesita, in qua a debet esse numerus

minor quam b . Si corpus ex quiete cadere debet, alia linea praeter rectam non satisfacit. Debet enim esse $c=0$, vt angulus ad A fit realis, et propterea habetur $y = \frac{kx}{\sqrt{g^2 - k^2}}$.

Corollarium 3.

228. Aequatio algebraica inuenta, si ab irrationalitate liberetur, fit ordinis quinti. Si in ea ponatur $a=b$, quo casu curuae tangens in A est verticalis; prodibit $\frac{5}{2} \frac{gy\sqrt{a}}{2} = (gx - \sqrt{a^2 + gax}) \sqrt{2\sqrt{a^2 + gax} - a} + a\sqrt{a}$.

Corollarium 4.

229. Si generaliter tangens in A debeat esse verticalis, erit $Vc=0$, atque ideo prodibit ista aequatio $dy = \frac{kdx(\sqrt{(b+gx)} - \sqrt{b})}{\sqrt{(g^2(b+gx) - k^2(\sqrt{(b+gx)} - \sqrt{b})^2)}}$. Si tangens in A ponatur horizontalis erit $kVc = g\sqrt{b}$ habebiturque haec aequatio $dy = \frac{dx(k\sqrt{(b+gx)} + (g-k)\sqrt{b})}{\sqrt{(g^2(b+gx)x(k\sqrt{(b+gx)} + (g-k)\sqrt{b})^2)}}$.

Scholion.

230. Vocatur haec curua linea aequabilis pressionis, eiusque solutio extat in Comment. Acad. Paris. quae cum hac nostra egregie conuenit. Ceterum ex solutione constat, si potentia non fuerit constans, sed vtcunque variabilis P, aequationem inueniam nihilominus integrationem admittere, si pressio in curuam ipsi P debeat esse proportionalis. Erit enim $k=mP$ atque pro curua quaesita prodibit

dibit sequens aequatio $\frac{2dy\sqrt{(b+\int Pdx)}}{ds} = \int \frac{mPdx}{\sqrt{(b+\int Pdx)}}$, cuius integralis est $dy\sqrt{(b+\int Pdx)} = mds\sqrt{(b+\int Pdx)} + mds\sqrt{c}$. Haec aequatio, si fuerit $c=0$ erit pro linea recta ad horizontem inclinata. At per \sqrt{c} definitur angulus, quem curua in A cum verticali constituit, eius enim sinus est $m + \frac{m\sqrt{c}}{\sqrt{b}}$. Quare si sumatur $\sqrt{c} = -\sqrt{b}$ curua tanger in A verticalem. Praeterea haec curua hanc habet proprietatem, vt tempus, quo arcus AM percurritur proportionale sit $m \cdot AM - PM$. Denique ex solutione huius propositionis fluit solutio sequentis, in qua ex data curua et pressione aequabili quaeritur quantitas potentiae deorsum tendentis.

PROPOSITIO 26.

Problema.

231. Data curua AM et celeritate initiali in A debita altitudini b, inuenire quantitatem potentiae perpetuo deorsum tendentis, quae faciat, vt corpus super curua AM descendens curuam vbique aequaliter premat.

Tabula VII.
Fig. I.

Solutio.

Sit potentia sollicitans quaesita $=P$, dictisque $AP=x$, $PM=y$, et $AM=s$, atque pressione, quam curua sustinet $=k$; habebitur ista aequatio $kdsdx = Pdx dy + 2bddy + 2ddy\int Pdx$ (224) in qua ds est elementum constans. Ex hac igitur aequatione quantitatem P erui oportet. Aequatio autem

N 3

per

per dy multiplicata et integrata dat $kds \int dx dy = dy^2 \int P dx + b dy^2$, ex qua prodit $\int P dx + b = \frac{kds}{dy} \int dx dy$; quae differentiata dat $P = \frac{kds}{dy} - \frac{2kds}{dx dy^2} \frac{ddy}{dy}$. At integrale $\int dx dy$ ita est fumendum, ut posito $x=0$ fiat $\frac{kds}{dy^2} \int dx dy = b$. Quo autem haec integratio facilius succedat, ponatur $dy = p dx$ erit $ds = dx \sqrt{1+p^2}$, et $\int dx dy = ds \int \frac{p dx}{\sqrt{1+p^2}}$, ideoque $\frac{kds}{dy^2} \int dx dy = \frac{k(1+p^2)}{p^2} \int \frac{p dx}{\sqrt{1+p^2}}$. Ex qua aequatione prodibit $P = \frac{k\sqrt{1+p^2}}{p} - \frac{2pk}{p^3 dx} \int \frac{p dx}{\sqrt{1+p^2}}$. Q.E.I.

Corollarium I.

232. Ex hac aequatione quoque statim celeritas corporis in singulis punctis habetur; altitudo enim debita celeritati corporis in M est $b + \int P dx = \frac{kds}{dy^2} \int dx dy = \frac{k(1+p^2)}{p^2} \int \frac{p dx}{\sqrt{1+p^2}}$. Tempus vero, quo arcus AM absolvitur, est $= \frac{1}{\sqrt{k}} \int p dx : \sqrt{\int \frac{p dx}{\sqrt{1+p^2}}}$.

Corollarium 2.

233. Perspicuum est ex aequatione inuenta, quantitatem potentiae P eo fore maiorem, quo maior sit k , ceteris paribus; variabilis enim eius valor ductus est in pressionem k .

Corollarium 3.

234. Etsi vero non videatur potentia P a celeritate initiali b pendere, quia in expressione
 b non

b non ineſt, tamen pendet P ab b ob integrale $\int \frac{p dx}{\sqrt{(1+pp)}}$, quod ita eſt accipiendum, vt poſito $x=0$, fiat $\frac{k(1+pp)}{p^2} \int \frac{p dx}{\sqrt{(1+pp)}} = b$. Variata ergo celeritate initiali alia prodit potentia ſollicitans, tametſi curua propoſita eadem maneat.

Exemplum I.

235. Sit curua AM parabola in A verticem et axem horizontalem habens; ita vt fit $ay = x^2$. Erit ergo $dy = \frac{2x dx}{a}$, hincque $p = \frac{2x}{a}$, et $\int \frac{p dx}{\sqrt{(1+pp)}} = \int \frac{2x dx}{\sqrt{(a^2+4x^2)}} = \frac{1}{2} V(a^2+4x^2) + C$. Quare erit $\frac{k(2+pp)}{p^2} \int \frac{p dx}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{k(a^2+4x^2)^{\frac{3}{2}}}{8x^2} + \frac{kC(a^2+4x^2)}{4x^2}$. Quae quantitas cum debeat eſſe $=b$, ſi fit $x=0$, erit $C = -\frac{a}{2}$, ſeu $\int \frac{p dx}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{V(a^2+4x^2)-a}{2}$. Ex quibus inuenietur $P = \frac{k a^3}{4x^3} - \frac{k(a^2-2x^2)V(a^2+4x^2)}{4x^3}$. In ipſo ergo puncto A potentia P erit infinite parua, tam numerator enim, quam denominator euaneſcunt, ſitque valor iſtius expreſſionis $=0$. Celeritas vero in A non poteſt eſſe arbitraria, etiam ſi conſtans C videatur ex b determinata. Nam C talem tantum habet valorem, qui expreſſionem $b + \int P dx = \frac{k ds}{dy^2} \int dx dy$ reddat finitae magnitudinis. Pendebit ergo b ab a eiusque valor inuenietur, ſi in expreſſione $\frac{k(a^2+4x^2)^{\frac{3}{2}}-ka(b^2+4x^2)}{8x^2}$, ponatur $x=0$. Tum autem prodibit $b = \frac{ka}{4}$. Hac ergo celeritate deſcenſus

sus incipere debet, vt pressio vbique aequalis a potentia P inuenta oriatur.

Exemplum 2.

236. Sit curua AM circulus radii a tangens rectam AP in A, erit $y = a - \sqrt{a^2 - x^2}$ et $p = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ atque $V(1 + pp) = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}$. Fiet ergo $\int \frac{pdx}{V(1 + pp)} = \int \frac{xdx}{a} = \frac{x^2}{2a}$, ad quod constantem addere non licet, quia $\frac{1 + pp}{pp} = \frac{a^2}{x^2}$ fit infinitum euanescente x . Erit ergo $k \frac{(1 + pp)}{pp} \int \frac{pdx}{V(1 + pp)} = \frac{ka}{2} = b + \int p dx$, quare celeritas corporis erit vniformis, ideoque potentia sollicitans euanescit. Perspicuum enim est corpus a nulla potentia sollicitatum in peripheria circuli aequabiliter progredi, eiusque vim centrifugam esse vbique eiusdem magnitudinis.

Exemplum 3.

237. Sit curua AM cyclois basin habens horizontalem et cuspide tangens verticalem AP in A; ita vt fit $dy = \frac{dx \sqrt{2ax}}{\sqrt{a^2 - 2ax}}$. Habetur ergo $p = \frac{\sqrt{2ax}}{\sqrt{a^2 - 2ax}}$ et $V(1 + pp) = \frac{a}{\sqrt{a^2 - 2ax}}$. Quare erit $\int \frac{pdx}{V(1 + pp)} = \int \frac{dx \sqrt{2ax}}{a} = \frac{2x \sqrt{2ax}}{3\sqrt{a}} + C$ et $\frac{k(1 + pp)}{pp} = \frac{ka}{2x}$. Sumta ergo constante C finitae magnitudinis fit $b = \infty$, quare fiat $C = 0$, erit $b + \int p dx = \frac{k\sqrt{2ax}}{3}$, et $b = 0$, Prodibit igitur $P = \frac{k\sqrt{a}}{3\sqrt{2x}}$. Si itaque corpus super cycloide AM ex A descendat ex quiete et sollicitetur

citetur deorsum a potentia, quae reciproce est vt radix quadrata ex abscissa AP, corpus vbique curuam aequali vi premet.

Scholion.

238. Dantur igitur casus, quibus celeritatem \sqrt{b} non pro lubitu assumere licet, quemadmodum in his exemplis euenit. Quoties enim $\frac{1+pp}{pp}$ fit infinite magnum facto $x=0$, constans in integratione ipsius $\frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}}$ addenda plerumque hoc ipso determinatur, quod celeritas initialis non debeat esse infinite magna. Semper autem, si curua in A tangit rectam AP, fit $\frac{1+pp}{pp}$ infinitum posito $x=0$, id quod in causa etiam est, quod in exemplis allatis celeritas initialis non sit arbitraria.

PROPOSITIO 27.

Problema.

239. Si corpus a quacunque vi perpetuo deorsum *trahatur*; inuenire curuam AM, super qua corpus ita mouetur, vt tota pressio, quam curua sustinet, datam habeat rationem ad pressionem a vi normali ortam. Tabula VII.
Fig. 1.

Solutio.

Descendat corpus ex A celeritate debita altitudini b , et posito $AP=x$, $PM=y$, $AM=s$,
Tom. II. O fit

fit potentia corpus in M sollicitans $=P$, erit altitudo debita celeritati, quam corpus in M habet, $=b+\int Pdx$. Tota vero pressio quam curua in M secundum directionem normalis MN , sustinet $=\frac{Pdy}{ds} + \frac{2ddy(b+\int Pdx)}{dx ds}$ sumto ds pro elemento constante. Iam habeat se haec pressio ad vim normalem $\frac{Pdy}{ds}$ vt m ad 1 ; erit $(m-1)Pdx dy = 2ddy(b+\int Pdx)$; quae est aequatio pro curua quaesita. Haec vero reducetur ponendo v loco $b+\int Pdx$, ad hanc formam $\frac{(m-1)dv}{v} = \frac{2ddy}{dy}$, quae integrata dat $2 \int \frac{dy}{ds} = (m-1) \int \frac{v}{a} \frac{v}{v^2} ds = \frac{m-1}{a^{\frac{m-1}{2}}} dy$. Ex qua habebitur $dy = \frac{v^{\frac{m-1}{2}} dx}{V(a^{m-1} - v^{m-1})}$
 $= \frac{dx(b+\int Pdx)^{\frac{m-1}{2}}}{V(a^{m-1} - (b+\int Pdx)^{m-1})}$, quae est aequatio pro curua quaesita. Q. E. I.

Corollarium I.

240. Celeritas corporis ibi est nulla, vbi $\frac{dy}{ds} = 0$, seu vbi curuae tangens est verticalis, si quidem $\frac{m-1}{2}$ fuerit numerus positivus, seu si m maior fuerit unitate. In his igitur casibus curuam in A tangere ponemus rectam AP , et celeritatem initialem seu $b=0$.

Co

Corollarium 2.

241. Quare si $m > 1$, seu si pressio tota maior est, quam pressio a vi normali orta; curuam

quaesitam dabit ista aequatio $dy = \frac{dx (\int P dx)^{\frac{m-1}{2}}}{V(a^{m-1} - (\int P dx)^{m-1})}$
in qua $\int P dx$ ita debet accipi, vt euanescat posito $x=0$.

Corollarium 3.

242. Si $m = 1$, vis centrifuga euanescet, et propterea linea quaesita erit recta. Fit autem ex aequatione $ddy=0$, quae est proprietas lineae rectae.

Corollarium 4.

243. Si $m=0$ tum tota pressio euanescit, quare tum prodibit curua, quam corpus celeritate sua altitudini b debita proiectum libere describit. Pro hac igitur curua habebitur ista aequatio $dy = \frac{dx \sqrt{a}}{(b-a + \int P dx)}$.

Corollarium 5.

244. Si m est vnitate minor, tunc vis centrifuga erit contraria vi normali, et propterea curua AM erit concaua deorsum. Ponamus igitur in A curuam esse normalem ad AP, erit $b=a$. Posito igitur $b=a$, habebitur pro curua quaesita haec aequatio $dy = \frac{a^{\frac{1-m}{2}} dx}{V((a + \int P dx)^{1-m} - a^{1-m})}$.

Corollarium 6.

245. Pro motu libero igitur, quo casu est $m=0$, inuenietur curua a corpore descripta, si in A horizontaliter celeritate altitudini a debita proiciatur, ex hac aequatione $dy = \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{fP}dx}$.

Exemplum I.

246. Sit vis sollicitans vniformis seu $P=g$ erit $\int Pdx = gx$. Casibus ergo quibus $m > 1$, et corpus in A ex quiete descendit, aequatio pro curuis quaesitis, scripto gc loco a , erit haec dy

$$= \frac{x^{\frac{m-1}{2}} dx}{\sqrt{(c^{m-1} - x^{m-1})}}. \text{ At si fit } m < 1, \text{ et corpus}$$

in A celeritate altitudini a debita proiciatur horizontaliter, curua super qua corpus moueri debet, scripto gc loco a , exponetur hac aequa-

$$\text{tione } dy = \frac{c^{\frac{1-m}{2}} dx}{\sqrt{((c+x)^{1-m} - c^{1-m})}}. \text{ Hac ergo curuae}$$

erunt algebraicae, si vel $\frac{3-m}{2m-2}$, vel $\frac{m}{1-m}$ fuerit numerus integer affirmatiuus. Hoc vero euenit si m fuerit terminus vel ex hac serie 3, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{9}{7}$, $\frac{11}{9}$ etc. vel ex hac serie 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$ etcet.

Corollarium 7.

247. Si igitur tota pressio triplo debeat esse maior quam vis normalis, curua erit circulus tangens

gens rectum AP in A. Namque erit $dy = \frac{x dx}{\sqrt{c^2 - x^2}}$
 seu $y = c - \sqrt{c^2 - x^2}$, aequatio ad circulum radii c .

Corollarium 8.

248. Sit tota pressio duplo maior quam vis normalis, seu vis centrifuga aequalis vi normali cum eaque conspirans; erit curua cyclois cuspide verticalem in A tangens. Aequatio enim erit $dy = \frac{dx \sqrt{x}}{\sqrt{c-x}}$.

Exemplum 2.

249. Quaecunque fuerit potentia sollicitans P, requirantur curuae eiusmodi, vt pressio tota quam curua sustinet, sit duplo maior quam vis normalis seu quam vis centrifuga, quae hoc casu illi aequalis erit. Fiat igitur $m=2$, et pro curua quaesita haec habebitur aequatio $dy = \frac{dx \sqrt{\int P dx}}{\sqrt{a - \int P dx}}$
 Seu dicto $\int P dx = X$ erit $dy = dx \sqrt{\frac{X}{a-X}} = \frac{X dx}{\sqrt{aX - X^2}}$
 Hoc exemplum ideo attulimus, quod in sequentibus demonstrabitur curuas huius proprietatis esse simul lineas celerrimi descensus.

Corollarium 9.

250. Perspicitur ergo infinitas esse curuas quaestioni satisfaciennes, propter quantitatem a arbitriariam. Atque infinitae hae curuae omnes tangent rectam AP in A.

Scholion. I.

251. Ex solutione huius problematis apparet, quomodo problema inuersum, quo curua et ratio inter totam pressionem et vim normalem datur, at quantitas vis sollicitantis deorsum tendentis quaeritur, solui debeat. Cum enim sit $v^{\frac{m-1}{2}} ds = a^{\frac{m-1}{2}} dy$, seu posito $dy = p dx$, $v^{\frac{m-1}{2}} \sqrt{(1+pp)} = a^{\frac{m-1}{2}} p$ erit $v = \frac{ap^{\frac{m-1}{2}}}{(1+pp)^{\frac{m-1}{2}}} = b + \int P dx$; hincque differentiendo $P dx = \frac{2 ap^{\frac{3-m}{m-1}} dp}{(m-1)(1+pp)^{\frac{m}{m-1}}}$. Consequenter inuenitur $P = \frac{2 ap^{\frac{3-m}{m-1}} dp}{(m-1)(1+pp)^{\frac{m}{m-1}} dx}$. Vbi notandum, celeritatem initialem iam esse datam, nam formula $\frac{ap^{\frac{2}{m-1}}}{(1+pp)^{\frac{1}{m-1}}}$, si in ea ponatur $x=0$, dat b .

Scholion 2.

252. Simili modo si motus corporis seu celeritas eius in singulis locis detur, atque ratio pressionis totius ad vim normalem, inuenietur ex celeritate statim potentia sollicitans. Vt sit v altitudo debita celeritati in M , erit ob $b + \int P dx = v$;

SUPER DATA LINEA IN VACUO. III

$=v$; $P=\frac{dv}{dx}$; atque aequatio $v^{\frac{m-1}{2}}ds = a^{\frac{m-1}{2}}dy$
 dabit naturam curvae requisitae. Cum enim v
 sit data, dari debet vel in x vel s et constanti-
 bus quantitibus, scilicet quae ad curvae naturam
 exprimendam adhibentur. Ceterum eadem pro-
 blemata in hypothesi virium centripetarum vel
 plurium potentiarum sollicitantium proposita non
 habent plus difficultatis, etiamsi ad magis perple-
 xas aequationes perueniatur. Atque cum simpli-
 cia exempla in medium proferre non liceat ad
 illustrandum, ea potius relinquo; hocque eo ma-
 gis, quod in sequentibus, ubi de brachystochro-
 nis agetur, eiusdem naturae curvae prodeant,
 quas ibi diligentius expositurus sum. Nunc igitur
 ad ea progredior problemata, in quibus motus
 quaedam proprietas proponitur, ex qua coniun-
 cta vel cum potentia sollicitante curua quaeritur,
 vel cum curua ipsa, potentia sollicitans. Proble-
 mata vero nimis facilia, ut quando vel scala
 celeritatum, vel scala temporum daretur,
 praetermitto, cum ex expressione celeritatis vel
 potentia sollicitans, vel ipsa curua sponte fluat,
 atque temporis expressio facillime ad celeritatem
 deducat. Hanc ob rem huiusmodi afferemus quae-
 stiones, in quibus non ipsae celeritates vel tem-
 pora dantur, sed relationes quaedam ab iis pen-
 dentes.

PRO-

PROPOSITIO 28.

Problema

Tabula VI.
Fig. 3.

253. Sollicitetur corpus a quacunque potentia deorsum tendente; inuenire curuam AM super qua corpus descendens motu aequabili deorsum feratur, seu aequabiliter a horizontali AB recedat.

Solutio.

Positis $AP=x$, $PM=y$, $AM=s$, et potentia sollicitante $=P$, sit celeritas corporis initialis in A debita altitudini b , erit celeritas in M debita altitudini $b+\int Pdx$. Quare tempusculum, quo elementum M percurritur, est $\frac{ds}{\sqrt{(b+\int Pdx)}}$. Quia autem motus per AM respondere debet motui aequabili per AP , concipiatur corpus motum super AP celeritate constante debita altitudini b , debebit tempus per Pp aequari tempori per Mm , vnde habebitur $\frac{dx}{\sqrt{b}} = \frac{ds}{\sqrt{(b+\int Pdx)}}$, seu $dy\sqrt{b} = dx\sqrt{\int Pdx}$. Pono autem celeritatem initialem congruentem cum celeritate descensus, vt curua in A tangat verticalem AP , et corpus primo principio recta descendat. Nam quia propter motum acceleratum necesse est vt curua continuo magis ad horizontem inclinetur, eius initium commodissime sumetur in A , vbi curua est verticalis. Prodiitque ergo pro hac curua aequatio $dy\sqrt{b} = dx\sqrt{\int Pdx}$. Q. E. I.

Co-

Corollarium I.

254. Haec ergo curua hanc habet proprietatem, vt quo maior fit corporis celeritas, eo magis quoque curua in eo loco ad horizontem fit inclinata.

Corollarium 2.

255. In loco ergo supremo, vbi celeritas corporis est minima, inclinatio curuae debet esse minima, seu tangens curuae in eo loco debet esse verticalis.

Corollarium 3.

256. Celeritas igitur initialis Vb non potest esse nulla, quia ei aequalis est celeritas respectiua, qua corpus deorsum progreditur, seu ab horizontali AB recedit.

Scholion I.

257. Vocatur haec curua linea aequabilis descensus, quia corpus super ea descendens aequali motu deorsum progreditur. Lineae huius inuentio extat in Act. Erud. Lips. A. 1690. pro hypothesis grauitatis, seu potentiae sollicitantis vni-
formis. Satisfacere autem huic quaestioni demonstratur ibi parabola cubicalis Neiliana, quae eadem in exemplo sequente prodibit.

Exemplum I.

258. Sit potentia sollicitans vniformis seu $P=g$, erit $\int P dx = gx$. Quare pro curua quaesita
Tom. II. P habet-

habebitur ista aequatio $dy \sqrt{b} = dx \sqrt{gx}$, quae integrata praebet hanc, $3y \sqrt{b} = 2x \sqrt{gx}$, seu $\frac{9by^2}{4g} = x^2$, quae est pro parabola Neiliana cuspide in A verticalem AP tangente, cuius parameter est $\frac{9b}{4g}$. Pro quaque ergo alia celeritate initiali, alia est sumenda parabola.

Exemplum 2.

259. Sit potentia sollicitans P potestati cuiusque abscissarum data linea auctarum proportionalis vt $P = \frac{(a+x)^n}{f^n}$, erit $\int P dx = \frac{(a+x)^{n+1} - a^{n+1}}{(n+1)f^n}$

Quamobrem pro curua satisfaciente habebitur ista aequatio $dy \sqrt{(n+1)bf^n} = dx \sqrt{(a+x)^{n+1} - a^{n+1}}$. Si $a=0$, ita vt potentia sollicitans P sit potestati exponentis n distantiarum corporis a horizontali AB proportionalis, erit $dy \sqrt{(n+1)bf^n} = dx \sqrt{x^{n+1}}$,

cuius integralis est $y \sqrt{(n+1)bf^n} = \frac{2x^{\frac{n+3}{2}}}{n+3}$, seu

$\frac{(n+1)(n+3)^2}{4} bf^n y^2 = x^{n+3}$. At $n+1$ debet esse numerus affirmatiuus, alioquin $\int P dx$ fieret infinitum, quia euanescere debet facto $x=0$. Fit ergo $n+3 > 2$; quare satisfaciunt parabolae verticibus in A verticalem AP tangentes. Vt si $n=1$ seu $P = \frac{x}{f}$, satisfaciet parabola Appolloniana, cuius parameter est $2 \sqrt{2bf}$.

Scholion 2.

260. Ex huius propositionis solutione perspicitur quomodo eius inuersa, qua data curua, quae sit

fit linea aequabilis descensus, requiritur potentia sollicitans. Cum enim fit $dy\sqrt{b} = dx\sqrt{\int P dx}$, erit $\int P dx = \frac{b dy^2}{dx^2}$. Ex qua oritur posito dx constante, $P = \frac{2b dy ddy}{dx^3}$. Perspicitur ergo potentiam P a celeritate initiali \sqrt{b} pendere. Curua vero data ita esse debet comparata, vt in A tangat verticalem AP . Si curuae radius osculi in M dicatur r , erit $P = \frac{2b ds^3 dy}{r dx^4}$. Quare si ex. gr. curua AM fuerit circulus tangens AP in A , cuius radius $= a$, erit $r = a$; $dy = \frac{xdx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$ et $ds = \frac{adx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$. Pro circulo ergo erit $P = \frac{2a^2bx}{(a^2-x^2)^2}$. Celeritas vero in M debita est altitudini $b + \int P dx = \frac{a^2b}{a^2-x^2}$.

Corollarium 4.

261. Patet ceterum ex aequatione, quam inuenimus, $\frac{dx}{\sqrt{b}} = \frac{ds}{\sqrt{(b + \int P dx)}}$ tempus quo arcus AM describitur, aequale esse tempori, quo corpus vniformiter celeritate altitudini b debita abscissam AP percurrit. In hoc ipso scilicet natura lineae aequabilis descensus nititur.

PROPOSITIO 29.

Problema.

262. *Trabente vniformi potentia vbique verticaliter deorsum, inuenire curuam AM , super qua corpus aequabiliter versus datam plagam AP progreditur.*

Tabula VII.
Fig. 3.

P 2

So-

Solutio.

Sit AM curva quaesita, et pro axe sumatur eius tangens AP, quae versus datam plagam dirigatur. Problema ergo requirit, ut corpus super AM motum a potentia uniformi g sollicitatum eodem tempore ad M perueniat, quo corpus motu aequabili nempe celeritate \sqrt{b} latum abscissam respondentem AP percurrit, eritque celeritas initialis in A debita altitudini b . Dicantur $AP = x$, $PM = y$, et $AM = s$, ducaturque verticalis AQ, in Q secans horizontalem MQ. Celeritas igitur corporis in M tanta erit, quantam in Q cadendo per AQ cum sua celeritate \sqrt{b} acquireret; quare celeritas corporis in M debita erit altitudini $b + gz$ dicta $AQ = z$. Per conditionem problematis vero debet esse $\int \frac{ds}{\sqrt{(b+gz)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{b}}$ seu $\frac{ds}{\sqrt{(b+gz)}} = \frac{dx}{\sqrt{b}}$, vnde oritur haec aequatio $dy \sqrt{b} = dx \sqrt{gz}$. At z in x et y dabitur ex angulo PAQ; fit sinus huius anguli $= m$, erit cosinus $= \sqrt{(1-m^2)}$ posito sinu toto $= 1$. Nunc erit $\sqrt{(1-m^2)} : m = AP(x) : PO$, ex quo erit $PO = \frac{mx}{\sqrt{(1-m^2)}}$, ideoque $MO = \frac{y\sqrt{(1-m^2)} - mx}{\sqrt{(1-m^2)}}$. At AO fiet $= \frac{x}{\sqrt{(1-m^2)}}$. Deinde ob $1 : m = MO : OQ$, erit $OQ = \frac{my\sqrt{(1-m^2)} - m^2x}{\sqrt{(1-m^2)}}$. Consequenter $AQ = z = my + x\sqrt{(1-m^2)}$, et hinc $dy = \frac{dz}{m} - \frac{dx\sqrt{(1-m^2)}}{m}$. Quo valore in aequatione inuenta substituto prodit $dz \sqrt{b} = dx \sqrt{b(1-m^2)} + m dx \sqrt{gz}$, quae transit in hanc $dx = \frac{dz\sqrt{b}}{m\sqrt{gz} + \sqrt{b(1-m^2)}}$. Cu-

Cuius integralis inuenitur $x = \frac{2\sqrt{bz}}{m^2g} - \frac{2b\sqrt{(1-m)}}{m^2g}$
 $\frac{m\sqrt{gz} + \sqrt{b(1-m^2)}}{\sqrt{b(1-m^2)}}$. Quae aequatio, loco z valore my
 $+ x\sqrt{(1-m^2)}$ substituto, dat naturam curuae quae-
 sitae. Q. E. I.

Corollarium I.

263. Curua ergo satisfaciens semper est li-
 nea transcendens, nempe a logarithmis pendens,
 nisi sit m vel 0 vel 1 , i. e. nisi recta AP vel sit ver-
 ticalis vel horizontalis.

Corollarium 2.

264. Si igitur $m=0$ problema cum praecedente
 conuenit, fit enim $z=x$, ideoque curua expri-
 metur hac aequatione $dy\sqrt{b} = dx\sqrt{gx}$, quae dat
 parabolam cubicalem vt supra.

Corollarium 3.

265. Si $m=1$ fit linea AP horizontalis, et
 $z=y$. Habetur ergo $dx = \frac{dy\sqrt{b}}{\sqrt{gy}}$, seu $x = \frac{2\sqrt{by}}{\sqrt{g}}$, seu
 $x^2 = \frac{4by}{g}$. Haec ergo curua est ipsa proiectoria,
 quam corpus in A celeritate \sqrt{b} horizontaliter
 proiectum libere describit. Haec enim curua, vt
 ex superiore libro intelligitur, hanc habet proprie-
 tatem, vt motus horizontalis sit aequabilis.

Corollarium 4.

266. Si x et y , et consequenter z est valde
 paruum, erit $1/(1 + \frac{m\sqrt{gz}}{\sqrt{b(1-m^2)}}) = \frac{m\sqrt{gz}}{\sqrt{b(1-m^2)}} - \frac{mmgz}{2b(1-m^2)}$
 $+ \frac{m^2gz\sqrt{gz}}{3b(1-m^2)\sqrt{b(1-m^2)}}$, quam proxime. Initium er-

go curvae AM exprimeretur hac aequatione $x = \frac{z}{\sqrt{1-m^2}} - \frac{2mz\sqrt{gz}}{3(1-m^2)\sqrt{b}}$ seu ob $z = my + x\sqrt{1-m^2}$, ista $y = \frac{2(my+x\sqrt{1-m^2})\sqrt{g(my+x\sqrt{1-m^2})}}{3\sqrt{b(1-m^2)}}$. Quae reducitur ad hanc $\frac{9b(1-m^2)y^2}{4g} = (my + x\sqrt{1-m^2})^2$.

Corollarium 5.

267. Si $m=1$, seu si linea AP est horizontalis, et series logarithmo illi aequalis continetur in infinitum, haecque series loco illius substituitur, termini omnes prae infinitesimo ∞ evanescent. Dabit autem infinitesimus $z=0$, seu $y=0$, id quod indicat hoc casu lineam rectam horizontalem quoque satisfacere. Id quod quidem per se est perspicuum, nam corpus super recta horizontali aequabiliter progredietur, ideoque motus eius horizontalis est aequabilis.

Scholion I.

268. Mirabile igitur videtur, quod aequatio differentialis et integralis quoque, quae prodit si ponatur $m=1$, parabolam tantum praebeat, et rectam horizontalem excludere videatur. Sed notandum est, lineam rectam horizontalem pro omnibus quoque plagis AP satisfacere cum motus in ea sit aequabilis, atque ideo versus omnes plagas aequabiliter progrediatur. Perspicuum autem est aequationem nostram generalem hanc rectam comprehendere non posse, quia rectam AP nusquam tangit, nisi in casu $m=1$, quo cum ea congruit.

gruit. Atque haec ipsa ratio quoque est, cur pro casu etiam $m=1$ linea recta non directe inueniri queat.

Scholion 2.

269. Manifestum quoque est eadem opera problema latiori sensu acceptum solui potuisse, si scilicet potentia sollicitans non vniformis sed variabilis vtcunque esset posita. Namque substituto P loco g , et $\int Pdz$ loco gz in aequatione differentiali, prodisset haec aequatio $dy \sqrt{b} = dx \sqrt{\int Pdz}$ pro curua quaesita. Habet vero z eundem valorem quem ante. Quare si P ab altitudine z et constantibus tantum pendeat, poterit $\int Pdz$ vel integrari vel per quadraturas exhiberi. Atque tum aequatio pro curua poterit construi, peruenietur enim ad hanc aequationem $dx = \frac{dz \sqrt{b}}{m \sqrt{\int Pdz + \sqrt{b}(1-m^2)}}$, in qua variables x et z sunt a se inuicem separatae. Nolui autem problema nimis lata significatione confusum efficere. Quando enim latior significatio neque plus difficultatis habet in se, neque ad peculiarem vsum accommodari potest, eo relicto particulare tantum problema pertractare constitui. Propter eandem rationem sequens problema isochronae paracentricae in hypothesi tantum potentiae vniformis et deorsum directae resoluo.

PRO-

PROPOSITIO 30.

Problema.

Tabula VII.
Fig. 4.

270. In hypothesi potentiae sollicitantis vniformis et deorsum tendentis inuenire curuam AM super qua corpus descendens aequabiliter a dato puncto C recedit.

Solutio.

Sit AM curua quaesita, eius sumatur tangens CA, quae per datum punctum C transit, erit corporis in A celeritas minima. Quia enim haec celeritas tota ad recedendum a C impenditur, in aliis curuae elementis necesse est, vt celeritas sit maior, eo quod eius tantum pars ad recessum infumitur. Punctum A ergo erit supremum curuae quaesitae. Sit igitur celeritas corporis in A debita altitudini b , hacque celeritate concipiatur corpus per AP vniformiter moueri: debet itaque hic motus cum descensu corporis super curua AM ita conuenire, vt ad quaeque puncta P et M aequaliter ab C distantia simul perueniatur. Posita celeritate in M debita altitudini v , ducatur $CP=CM=x$, et sit sinus ang. $PCM=t$, posito sinu toto $=1$. Ducantur arcus circulares PM et pm centro C, erit $Mn=Pp=dx$, et ang. pCm sinus $=t+dt$. Quare erit sinus ang. $mCn = \frac{dt}{\sqrt{1-tt}} = \frac{mn}{x}$. Erit igitur $mn = \frac{xd t}{\sqrt{1-tt}}$, atque $Mm = \sqrt{(dx^2 + \frac{x^2 dt^2}{1-tt})}$. Cum ergo elementum Mm celeritate Vv

eo-

eodem tempore describi debeat, quo elementum Pp celeritate \sqrt{b} , erit $\frac{dx}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{x^2}{v} + \frac{x^2 dt^2}{(1-tt)v}}$ seu $dx\sqrt{(1-tt)}(v-b) = x dt\sqrt{b}$. Requiritur ergo ut v determinetur. Ad hoc ducatur ex C verticalis CQ et horizontales AD, et MQ; postquam ergo corpus ex A ad M descendit, deorsum peruenit interuallo DQ. Quare posita potentia sollicitante $= g$ erit $v=b+g$. $DQ=b+g$. $CQ-g$. CD . Sit $AC=a$, sinus anguli $ACD=m$, erit eius cosinus $= \sqrt{(1-m^2)}$, vnde erit $CD = a\sqrt{(1-m^2)}$, et cosinus ang. $MCQ=mt + \sqrt{(1-m^2)}(1-t^2)$. Quam ob rem erit $CQ=mtx + x\sqrt{(1-m^2)}(1-t^2)$. Ex quibus conficitur $v=b-ga\sqrt{(1-m^2)} + mgtx + gx\sqrt{(1-m^2)}(1-t^2)$. Quo loco v valore substituto prodibit ista aequatio $dx\sqrt{(1-tt)}(mgtx + gx\sqrt{(1-m^2)}(1-t^2) - ga\sqrt{(1-m^2)}) = xdt\sqrt{b}$, seu haec $\frac{dx}{x}\sqrt{(1-tt)}(mgtx + gx\sqrt{(1-m^2)}(1-t^2) - ga\sqrt{(1-m^2)}) = \frac{dt\sqrt{b}}{\sqrt{(1-t^2)}}$. Quae aequatio exprimit naturam curuae quaesitae, et, si indeterminatae x et t a se inuicem separari possent, ipsa curua construi posset. Q. E. I.

Corollarium I.

271. Perspicuum igitur est ex aequatione inuenta innumerabiles curuas quaesito satisfacere, ob tres quantitates angulum scilicet ACD, distantiam AC et celeritatem \sqrt{b} , qua corpus a fixo puncto C recedit, quae pro lubitu variari possunt.

Corollarium 2.

272. Atque harum trium quantitatum binis quibusque assumtis pro arbitrio tertia sola variabilis infinitas producet curuas quaesito satisfaciennes. At quia aequatio haec generaliter construi non potest, omnes curvae satisfaciennes exhiberi non possunt.

Corollarium 3.

273. Quod ad figuram curuarum harum attinet, intelligitur, eas omnes in A cuspidem habere debere, quia A est punctum supremum. Alter enim curvae ramus ex A ad alteram partem rectae AP descendere debet; Excepto casu quo CAP fit linea horizontalis, tum enim haec ratio cessat.

Corollarium 4.

274. Alter vero ramus ad alteram rectae CP partem positus aequè soluit problema ac iste AM. Inuenitur enim eadem ex aequatione, si modo t seu angulus PCM accipitur negatiuus.

Corollarium 5.

275. Ex sola autem aequationis inuentae inspectione perspicitur eam duobus casibus separationem iudeterminatarum admittere, quorum alter est si $a=0$, alter si $m=1$. Illo scilicet casu euanescit distantia AC et punctum A in C incidit: hoc vero casu recta CP fit horizontalis.

Hos.

Hos igitur ambos casus in sequentibus duobus exemplis euoluemus.

Exemplum I.

276. Incidat ergo punctum A in C seu corpus descensum incipiat in ipso puncto C; fiet $a = 0$. Hoc ergo casu aequatio pro curua quaesita abibit in hanc $\frac{dx\sqrt{g}}{\sqrt{bx}} = \frac{dt}{\sqrt{(1-tt)(mt+\sqrt{(1-m^2)(1-t^2)})}}$, in qua indeterminatae a se inuicem sunt separatae. Constructio igitur curuae quaesitae per quadraturas confici poterit; fiet enim $\frac{2\sqrt{gx}}{\sqrt{b}} = \int \frac{dt}{\sqrt{(1-tt)(mt+\sqrt{(1-m^2)(1-t^2)})}}$, quae integratio ita debet absolui, vt facto $t=0$ fiat $x=0$. Namque generalis aequatio ita debet integrari vt posito $t=0$ fiat $x = a$. Hoc igitur casu integrale

$\int \frac{dt}{\sqrt{(1-tt)(mt+\sqrt{(1-m^2)(1-t^2)})}}$ ita est accipiendum, vt facto $t=0$ ipsum euanescat. Ad constructionem huius integralis vero melius perspiciendam, pono cosinum anguli MCQ seu $mt + \sqrt{(1-m^2)(1-tt)} = q$, quo facto fiet sinus ang. MCm, seu $\frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{-dq}{\sqrt{(1-qq)}}$. Hisque substitutis habebitur ista aequatio: $\frac{2\sqrt{gx}}{\sqrt{b}} = \int \frac{-dq}{\sqrt{(q-q^2)}}$, quod integrale ita est accipiendum, vt facto $q = \sqrt{(1-m^2)}$ fiat $x=0$.

Corollarium 6.

277. Si ipsi b diuersi valores attribuantur, omnes curuae quae oriuntur erunt inter se similes,

les, manente enim angulo MCP, distantia CM proportionalis est accipienda ipsi b altitudini generanti celeritatem initialem

Corollarium 7.

278. Quicumque ergo fuerit angulus ACQ, constructio non immutatur, sed tantum constans adiicienda. Quare constructio inferuiens vni casui ad omnes casus potest accommodari.

Scholion I.

279. Problema hoc de aequabili recessu a fixo puncto praeterito seculo jam erat propositum et solutum in Act. Lips. A. 1695. atque solutiones quae ibi extant conueniunt apprime cum casu huius exempli, vniuersalis enim solutio illo loco non est data. Quamobrem casus exempli sequentis nouas prorsus dare videtur curuas huic quaestioni satisfaciennes. At quia sequens constructio cum hac conuenit, quanquam ipsae curuae sint prorsus differentes, tamen etiam sequens casus in iis, quae hac de re tradita sunt, contineri censendus est. Vocantur autem istiusmodi curuae isochronae paracentricae, quia motus super iis a centro fixo fit aequabilis.

Exemplum 2.

280. Sit linea CAP horizontalis, fiet $m=1$ atque in aequatione generali euanesceat terminus $ga\sqrt{1-m^2}$. Hoc igitur casu aequatio fit vt ante

te separabilis, transmutabitur enim generalis aequatio in hanc $\frac{dx\sqrt{g}}{\sqrt{bx}} = \frac{dt}{\sqrt{(t-t^3)}}$, seu $\frac{2\sqrt{gx}}{\sqrt{b}} = \int \frac{dt}{\sqrt{(t-t^3)}}$ quod integrale ita est accipiendum, vt posito $t=0$ fiat $x=a$. Quare $\int \frac{dt}{\sqrt{(t-t^3)}}$ ita integrato, vt euanescat posito $t=0$ erit $\frac{2\sqrt{gx}-2\sqrt{ga}}{\sqrt{b}} = \int \frac{dt}{\sqrt{(t-t^3)}}$. Quae constructio ergo cum praecedente conuenit.

Scholion 2.

281. An praeter hos duos casus alii inueniri queant, qui separationem indeterminatarum admittant, vehementer dubito. A nemine quidem, quantum scio, alius est erutus, quamobrem non necesse esse iudico, vt huic materiae diutius immorer.

PROPOSITIO 31.

Problema.

282. *Potentia sollicitante existente uniformi et deorsum tendente, inuenire curuam AM, super qua corpus data cum celeritate initiali ita moueatur, vt aequalibus temporibus aequales angulos circa punctum fixum C absoluat.* Tab. VIII.
Fig. 1.

Solutio.

Sumatur initium curuae in loco quodam A in quo recta CA in ipsam curuam est normalis. Sitque celeritas in A debita altitudini b , et $AC=a$; erit celeritas angularis vt $\frac{\sqrt{b}}{a}$, cui quanti-

Q 3

tati

tati celeritas angularis in singulis punctis M expressa debet esse aequalis. Sit celeritas in M debita altitudini v et $CM = x$, erit $mn = dx$. Fiat ut $Mm: Mn = Vv: \frac{Mn \sqrt{v}}{Mm}$, quae quantitas per MC diuisa dat celeritatem angularem $= \frac{Mn \sqrt{v}}{Mm MC}$, quae cum aequalis esse debeat ipsi $\frac{\sqrt{b}}{a}$ habebitur haec aequatio $Mn. a \sqrt{v} = Mm. MC. \sqrt{b} = Mm. x \sqrt{b}$. Sit jam ducta verticali DCQ , sinus ang. $ACD = m$, erit cosinus eius $= \sqrt{(1-m^2)}$ posito sinu toto $= 1$. Item sinus ang. MCD sit $= t$, erit cosinus $= \sqrt{(1-tt)}$. His igitur positis erit $CD = a \sqrt{(1-m^2)}$ et $CQ = -x \sqrt{(1-tt)}$, atque sinus ang. $MCm = \frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{Mn}{x}$, vnde fit $Mn = \frac{x dt}{\sqrt{(1-tt)}}$ et $Mm = \frac{\sqrt{(dx^2 - tt dx^2 + x^2 dt^2)}}{\sqrt{(1-tt)}}$. At quia corpus ex altitudine DQ est delapsum, erit $v = b + g$. $DQ = b + g a \sqrt{(1-m^2)} - g x \sqrt{(1-tt)}$. Quibus valoribus in aequatione inuenta substitutis orietur haec aequatio, $bdx^2(1-tt) = a^2 b dt^2 + g a^2 dt^2 \sqrt{(1-m^2)} - g a^2 x dt^2 \sqrt{(1-tt)} - b x^2 dt^2$, seu $dx \sqrt{b} = \frac{dt \sqrt{(a^2 b + g a^2 \sqrt{(1-m^2)} - g a^2 x \sqrt{(1-tt)} - b x^2)}}{\sqrt{(1-tt)}}$, Quae aequatio ita integrata ut posito $t = m$ fiat $x = a$, exprimit naturam curuae quaesitae. Q. E. I.

Corollarium I.

283. Si loco sinuum angulorum ACD, MCD eorum cosinus introducantur, fiatque $\sqrt{(1-m^2)} = n$ et $\sqrt{(1-tt)} = q$; erit $dx \sqrt{b} = \frac{dq \sqrt{(a^2 b + g n a^2 - g a^2 q x - b x^2)}}{\sqrt{(1-q^2)}}$ seu

feu $\frac{-dq}{\sqrt{(1-qq)}} = \frac{dx\sqrt{b}}{\sqrt{(b(a^2-x^2)+ga^2(na-qx))}}$, quae ita est integranda, vt posito $q=n$ fiat $x=a$.

Corollarium 2.

284. Vbi curua ad radium CM est normalis, ibi ob euanescentem dx erit $b(a^2-x^2)=ga^2(qx-na)$.

Quoties ergo est $q = \frac{a^2b+gna^3-bx^2}{ga^2x}$, erit curua in radium CM normalis. Quia autem q intra limites $+1$ et -1 continetur; x non potest esse maior data quantitate; nam posito $x=\infty$ fieret $q=\infty$, quod esset absurdum.

Corollarium 3.

285. Si CM est normalis in curuam erit celeritas angularis $= \frac{vv}{MC} = \frac{\sqrt{(b+gna-gqx)}}{x}$, quae aequalis esse debet ipsi $\frac{vb}{a}$. Maxima ergo est illa celeritas angularis si $q=-1$. Ille autem motus angularis eo fit minor quo maior est x . Eo vero minor porro erit motus angularis, quo magis obliqua est curua ad radium MC. Quare curua non vltra datam distantiam infra C descendere poterit, quam distantiam dabit x ex hac aequatione $x\sqrt{b} = a\sqrt{(b+gna+gx)}$, nempe $x = \frac{ga^2}{2\epsilon} + a\sqrt{(\frac{ga^2}{4b^2} + \frac{gna}{b} + 1)}$. Haec ergo est maxima curuae a puncto C distantia.

Corollarium 4.

286. Cum igitur curua non vltra datam distantiam a centro fixo C distare queat, curua haec erit

erit in se rediens. Scilicet vel post vnam reuolutionem vel post duas vel post tres etc. vel etiam post infinitas reuolutiones in se redibit. Prout litterae a , b , n et g fuerint assumtae.

Exemplum I.

287. Si potentia sollicitans euanescit fit $g=0$, et corpus aequabiliter promouebitur. Tum igitur pro curua descripta haec habebitur aequatio $\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{dt}{\sqrt{1-tt}}$, cuius integralis per log. est $\sqrt{1-tt} = \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, seu $\sqrt{1-tt} = \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, seu $\sqrt{1-tt} = \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, seu $\sqrt{1-tt} = \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$. Quae reducta dat $(a^2-x^2)^2 = 4(a^2+x^2)ctx - 4c^2x^2 - 4a^2c^2t^2$. Incidat recta AC in verticalem CD hoc enim perinde est, ob euanescentem potentiam g , debet ergo fieri $x=a$, posito $t=0$, ex quo fit $a^2+c^2=0$, atque $a^2=a^2x^2+a^2t^2$ seu $x^2=a^2(1-tt)$. Quae aequatio est pro circulo diametri a per punctum fixum C transeunte. Quando enim motus in circulo est aequabilis, motus quoque respectu cuiusque puncti in peripheria erit aequabilis.

Scholion.

288. Perspicuum autem est hoc casu peripheriam circuli quoque satisfacere, cuius centrum est in puncto fixo C, quippe quae solutio est facillima et sua sponte se prodit. Quamobrem maxime mirandum est hunc casum in solutione non contineri.

neri. Ratio vero huius similis prorsus est eius, quam supra §. 268. dedimus, vbi simile paradoxum obseruauimus. Ad circulum centrum in C habentem designandum prodire debuisset $x = a$, seu $dx = 0$, quod vero quia x vt quantitas variabilis consideratur non fieri potuit, praesertim cum in eadem aequatione solutio alia sit contenta, in qua x est quantitas reuera variabilis. Ex prima vero aequatione posito $v = b$, quae est $Mn \cdot a = Mm \cdot x$ intelligi potest circulum satisfacere, nam si vbique est $x = a$ erit quoque $Mn = Mm$. Magnum autem arbitror subsidium ad construendas curuas huic problemati satisfaciennes proditurum, si tali methodo solutio inveniri posse, quae sponte pro casu motus aequabilis circulum centrum in C habentem esset datura. Cum enim casus simplicissimus ita sit inuolutus et abditus, vt elici vix queat, conicere licet, alias saepe curuas simplices in generali quapiam solutione contineri, quae sint erutu difficillimae.

PROPOSITIO 32.

Problema.

289. Si corpus attrahatur vi quacunque ad Tab. VIII.
Fig. 2. centrum virium C, inuenire curuam AM super qua corpus data cum celeritate descendens, motu aequabili versus C feratur.

Solutio.

Sit corporis in A celeritas minima debita altitudini b ; erit recta CA tangens curvae in A, quia corpus in A directe ad C moueri debet. Sit $AC=a$, et $CM=x$; celeritas in M debita altitudini v , et vis centripeta in $M=P$, erit $v=b - \int P dx$, quod integrale ita est accipiendum vt facto $x=a$, euanescat, fiatque $v=b$. Celeritas vero in M tanta esse debet, qua elementum Mm eodem tempusculo absoluitur, quo elementum Pp celeritate \sqrt{b} . Erit ergo $\sqrt{b} : \sqrt{v} = Pp : Mm = MT : MC$, vnde prodibit ista aequatio $b \cdot MC^2 = v \cdot MT^2 = b \cdot MT^2 - MT^2 \cdot \int P dx$. Dicatur perpendiculum CT in tangentem $=p$, erit $bp^2 = -(x^2 - p^2) \int P dx$, seu $p^2 = \frac{-x^2 \int P dx}{b - \int P dx}$. Vel si sinus ang. ACM ponatur $=t$ erit $\frac{mn}{MC} = \frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}}$. Vnde sequens emergit aequatio: $\frac{dt \sqrt{b}}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{-dx}{x} \sqrt{-\int P dx}$. Quarum vtraque, si quidem P per x datur, ad curuam construendam est apta. Q. E. I.

Corollarium I.

290. Si vis centripeta potestati cuiusque distantiarum fuerit proportionalis, nempe $P = \frac{x^n}{f^n}$, erit $\int P dx = \frac{x^{n+1} - a^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Hoc substituto habebitur pro curua AM sequens aequatio $\frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{-dx}{x}$

$\frac{-dx}{x} \sqrt{\frac{a^{n+1} - x^{n+1}}{(n+1)bf^n}}$. Quae aequatio ita debet integrari vt facto $t=0$ fiat $x=a$.

Corollarium 2.

291. Si $\int \frac{dt}{\sqrt{1-tt}}$ ita accipiat, vt fiat $=0$ si $t=0$, prodibit ex illa aequatione integrata haec

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1-tt}} = \frac{-2\sqrt{a^{n+1} - x^{n+1}}}{(n+1)\frac{3}{2}\sqrt{bf^n}} + \frac{a^{\frac{n+1}{2}}}{(n+1)\frac{3}{2}\sqrt{bf^n}}$$

$$\int \frac{a^{\frac{n+1}{2}} + \sqrt{a^{n+1} - x^{n+1}}}{a^{\frac{n+1}{2}} - \sqrt{a^{n+1} - x^{n+1}}} = BS, \text{ si centro C ra-}$$

dio $BC=r$ descriptus fuerit arcus circuli BS . Ex quo patet curuam AM infinitos habere gyros antequam corpus in C perueniat. Nam posito $x=0$ fit $BS=\infty$.

Corollarium 3.

292. Pendet igitur constructio huius curuae partim a quadratura circuli, partim a logarithmis si $n+1$ est numerus affirmatiuus. At si $n+1$ est numerus negatiuus, is terminus qui per logarithmos erat datus, ad quadraturam circuli quoque reducitur.

Corollarium 4.

293. Curua haec punctum habebit flexus contrarii, vbi est $dp=0$. Ad hoc igitur inue-

niendum fumatur aequatio $p p = \frac{-x^2 f P dx}{b - f P dx}$, ex qua differentiata positoque $dp = 0$ prodibit $b P x = 2 (f P dx)^2 - 2 b f P dx$.

Corollarium 5.

294. In casu igitur quo $P = \frac{x^n}{f^n}$ punctum flexus contrariiibi erit, vbi est $(n+1)^2 b f^n x^{n+1} = 2 (a^{n+1} - x^{n+1})^2 + 2(n+1) b f^n (a^{n+1} - x^{n+1})$.

Vnde haec oritur aequatio $\frac{a^{n+1} - x^{n+1}}{n+1} = \frac{(n+3) b f^n}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{(n+3)^2 b^2 f^{2n} + 8 a^{n+1} b f^n}$.

Quae in integrali substituta dabit angulum ACM in quo est punctum flexus contrarii.

Scholion. I.

295. Cum autem de natura huiusmodi curvarum difficile sit in genere quicquam producere, ad casus speciales descendendum erit principales, id quod in sequentibus exemplis efficere visum est.

Exemplum I.

296. Sit vis centripeta ipsis distantiiis proportionalis seu $P = \frac{x}{f}$ fiet $n=1$. Posito ergo arcu $BS=s$ curua quaesita exprimetur ista aequatione $s = -\frac{\sqrt{(a^2-x^2)}}{\sqrt{2bf}} + \frac{a}{2\sqrt{2bf}} \log \frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a-\sqrt{a^2-x^2}}$. Ex qua

qua aequatione data quavis puncti M a C distantia reperitur angulus BCS, quo absoluto corpus in ea distantia existit. Inter distantiam MC, x vero et perpendicularum $CT = p$ aequatio haec erit $pp = \frac{a^2 x^2 - x^4}{2bf + a^2 - x^2}$. Huius curvae punctum flexus contrarii erit vbi est $dp = 0$, hoc autem vbi est $x^4 = 2a^2 x^2 + 4bf x^2 - a^4 - 2abf$, seu $xx = a^2 + 2bf - 2\sqrt{(a^2 bf + b^2 f^2)}$, quia x non maior esse potest quam a . Hinc fit $x = \sqrt{(a^2 + bf)} - \sqrt{bf}$, atque $\frac{pp}{xx} = \frac{\sqrt{(a^2 + bf)} - \sqrt{bf}}{\sqrt{(a^2 + bf)}}$. Anguli ergo, quem curua in puncto flexus contrarii constituit cum radio CM cosinus erit $= \frac{\sqrt{bf}}{\sqrt{(a^2 + bf)}}$. Aequatio vero curuae in seriem conuersa erit; posito $\sqrt{(a^2 - x^2)} = y$, haec $s\sqrt{2bf} = \frac{y^3}{3a^2} + \frac{y^5}{5a^4} + \frac{y^7}{7a^6} + \frac{y^9}{9a^8} + \text{etc.}$ In ipso ergo curuae principio, vbi x non multo minor est quam a , seu y valde paruum erit $s\sqrt{2bf} = \frac{y^3}{3a^2}$. Deinde ex ipsa aequatione apparet facto $x = 0$ fore $s = \infty$, quare curua infinitis spiris ambit centrum C, eritque quando corpus centro iam proximum est $\frac{pp}{xx} = \frac{aa}{2bf + a^2}$. Exquo sequitur proxime circa centrum C curuam abire in logarithmicam spiralem.

Exemplum 2.

297. Sit $n = -1$, seu $n + 1 = 0$, qui casus ex ipsa aequatione differentiali est eruendus. Fit enim ob $P = \frac{f}{x}$, $\int P dx = \int \frac{f}{x}$, vnde habebitur ista

R 3

aequa-

aequatio $ds = \frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{-dx}{x\sqrt{b}} \sqrt{fl} \frac{a}{x}$, cuius integralis est $s = \frac{2f(la-lx)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{bf}}$. Altera aequatio inter per-

pendiculum p et x , erit haec $pp = \frac{fxxl \frac{a}{x}}{b + fl \frac{a}{x}}$. Ex

qua inuenitur punctum flexus contrarii in eo loco, in quo est $b = 2f(l \frac{a}{x})^2 + 2bl \frac{a}{x}$ seu $l \frac{a}{x} = \frac{-b + \sqrt{(bb + 2bf)}}{2f}$. Hoc ergo habebitur sumendo $s =$

$\frac{(-b + \sqrt{(bb + 2bf)})^{\frac{3}{2}}}{3f\sqrt{2a}}$. Perspicitur porro si fiat $x=0$, fore $s=\infty$, seu curuam infinitis spiris centrum C circumdare, hoc vero casu erit $\frac{pp}{xx} = 1$, seu $p=x$. Vltimo ergo curua in circulum infinite paruum abit.

Exemplum 3.

298. Ponatur $n=-2$ vt vis centripeta sit quadratis distantiarum reciproce proportionalis, erit $\frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{-f dx}{x} \sqrt{\frac{a-x}{abx}} = ds$. Ponatur $\frac{a-x}{x} = yy$, fiet $\frac{ds \sqrt{ab}}{2f} = \frac{yy dy}{1+yy} = dy - \frac{dy}{1+yy}$. Exprimit vero $\int \frac{dy}{1+yy}$ arcum, cuius tangens est y seu $\sqrt{\frac{a-x}{x}}$ fit hic arcus $=t$; erit $t + \frac{s\sqrt{ab}}{2f} = y = \sqrt{\frac{a-x}{x}}$. Vbique ergo data distantia x capiendus est arcus s in $\frac{\sqrt{ab}}{2f}$ ductus aequalis differentiae inter tangentem $\sqrt{\frac{a-x}{x}}$ et arcum respondentem, posito radio $=1$. Si x ponatur $=0$, fiet $s=\infty$, ex quo sequitur curuam per infinitas spiras ad centrum C descendere.

Prae-

Praeterea ob $-\int P dx = \frac{ff(a-x)}{ax}$ erit $pp = \frac{ffxx(a-x)}{abx+ff(a-x)}$

Ex quo sequitur si x evanescat fore $\frac{pp}{xx} = 1$, seu curvam ultimo quoque in circulum infinite paruum abire. Si fuerit $ab = ff$, erit $pp = \frac{xx(a-x)}{a}$, et $t + \frac{s}{2} = \sqrt{\frac{a-x}{x}}$ Punctum flexus contrarii hoc ergo casu incidet in eum locum, vbi est $2ax = 3xx$, seu vel $x=0$ vel $x = \frac{2a}{3}$. Sin autem fuerit $ab = 4ff$, erit $t + s = \sqrt{\frac{a-x}{x}}$; et punctum flexus contrarii habebitur capiendò $x = a\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Scholion 2.

299. Quo autem appareat, quomodo spirae infinitae sint comparatae, si vis centripeta fuerit potestati cuicunque distantiarum proportionalis seu $P = \frac{x^n}{f^n}$; consideretur aequatio inter p et x ,

quae erit $\frac{pp}{xx} = \frac{a^{n+1} - x^{n+1}}{(n+1)bf^n + a^{n+1} - x^{n+1}}$. Vbi

duo distinguendi sunt casus alter quo $n+1$ est est numerus affirmatiuus alter quo est negatiuus. Si $n+1$ est numerus affirmatiuus factò $x=0$ fit $\frac{pp}{xx} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)f^n + a^{n+1}}$. Hoc ergo casu curua

AM circa centrum C abit in logarithmicam spiralem. At si $n+1$ est numerus negatiuus factò $x=0$ fit $\frac{pp}{xx} = 1$. His ergo in casibus curua in C abit in circulum infinite paruum. Fit his casibus corporis ad C accedentis celeritas infinite magna, et

et hanc ob rem nisi curua in circulum abiret corpus celeritate infinite magna ad C accederet, quod esset contra conditionem problematis. Determinatis igitur curuis, super quibus corpus aequabiliter ad centrum virium accedit, inuestigabimus eas curuas, super quibus motu aequabili circa centrum virium circumfertur.

PROPOSITIO 33.

Problema

Tab. VIII. 300. Si corpus attrahatur perpetuo ad centrum
Fig. 3. virium C, determinare curuam AM, super qua corpus motu angulari circa centrum C aequabiliter mouetur.

Solutio.

Sit A curuae punctum supremum, vbi curua normalis erit in radium AC; sitque celeritas corporis in A debita altitudini b et $AC = a$, erit motus angularis in A $= \frac{\sqrt{b}}{a}$, cui quantitati motus angularis in singulis punctis M debet esse aequalis. Ponatur $CM = x$, cui aequalis capiatur CP, et sit vis centripeta in M $= P$, erit celeritas in M debita altitudini $b - \int P dx$, integrali $\int P dx$ ita accepto vt euanescat posito $x = a$. Ducta tangente MT vocetur perpendicularum ex C in eam demissum $CT = p$, erit $x:p = Mm:mn$. Hanc ob rem celeritas per $mn = \frac{p\sqrt{b - \int P dx}}{x}$, et celeritas angularis $= \frac{p\sqrt{b - \int P dx}}{x^2}$, quae aequa-

aequalis esse debet ipsi $\frac{\sqrt{b}}{a}$. Hinc prodit sequens
 aequatio $bx^4 = a^2bp^2 - a^2p^2 \int Pdx$, seu $p = \frac{x^2\sqrt{b}}{a\sqrt{(b - \int Pdx)}}$.
 Centro C radio BC = 1 describatur arcus circu-
 li BS, qui dicatur = s , erit $1:ds = x:mn$, unde
 erit $mn = xds$ et $Mm = \sqrt{(dx^2 + x^2ds^2)}$. Cum
 nunc sit $x:p = \sqrt{(dx^2 + x^2ds^2)}:xds$ fiet $p = \frac{xds}{\sqrt{(dx^2 + x^2ds^2)}}$. Quo valore in aequatione inuenta
 substituto habebitur $bdx^2 + bx^2ds^2 = a^2bds^2 - a^2ds^2 \int Pdx$, hincque $ds = \frac{-dx\sqrt{b}}{\sqrt{(a^2b - bx^2 - a^2 \int Pdx)}}$. Ex qua ae-
 quatione curua quaesita poterit construi. Q.E.I.

Corollarium I.

301. Quo minor fit x , eo maior fiet $b - \int Pdx$, quare quo minor fit x eo minor quoque
 fiet $\frac{p}{x}$, seu sinus anguli CMT. Est enim $\frac{p}{x} = \frac{x\sqrt{b}}{a\sqrt{(b - \int Pdx)}}$.

Corollarium 2.

302. Porro tam ex hypothese quam hac ae-
 quatione x non potest fieri maior quam a , fie-
 ret enim $p > x$. Quamobrem radiorum CM nul-
 lus potest esse normalis in curuam, nisi qui est
 maximus nempe = AC.

Scholion I.

303. Per se quidem manifestum est in qua-
 cunque vis centripetae hypothese circulum cen-
 tro

tro C descriptum satisfacere; corpus enim super circulo uniformiter moueri debebit. Etiam si autem aequatio generalis circulum non comprehendere videatur, nihilo tamen minus in ea contentus esse debet; vt iam supra innuimus.

Scholion 2.

304. Perspicuum autem est nullam aliam curuam centrum C cingentem praeter circulum quaesito satisfacere posse. Nam in huiusmodi curuis fieri non potest, vt omnes rectae ex C eductae et in curuam normales sint inter se aequales. Quae igitur curuae praeter circulum problema soluunt, eae per ipsum centrum C transire debent, vt plus vno radio MC non sit in curuam normali. Cuiusmodi ergo sint hae curuae in sequente exemplo videamus.

Exemplum.

305. Sit vis centripeta distantis a centro directe proportionalis seu $P = \frac{x}{f}$ erit $-\int P dx = \frac{a^2 - x^2}{2f}$. Quo substituto pro curua sequens prodit aequatio $ds = \frac{-dx \sqrt{b}}{\sqrt{(b + \frac{a^2}{2f})(a^2 - x^2)}}$. Est vero $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$ arcus, cuius sinus est $\frac{x}{a}$ existente toto sinu $= 1$. Notetur hic arcus per $A \frac{x}{a}$. Sit sinus arcus BS $= t$, erit $s = A \cdot t$; vnde fiet $A \cdot t = \sqrt{\frac{2bf}{a^2 + 2bf}}$.
(A. 1—

(A.1-A. $\frac{x}{a}$). Seu arcus cuius cosinus est $\frac{x}{a}$ erit=A.t
 $\sqrt{\frac{a^2+2bf}{2bf}}$. Vnde constructio curvae facilis fluit,
 eritque curua algebraica quoties $\sqrt{\frac{a^2+2bf}{2bf}}$ est nu-
 merus rationalis. Sit $\sqrt{\frac{a^2+2bf}{2bf}} = m$ seu $2bf =$
 $\frac{a^2}{m^2-1}$, erit $\frac{mdt}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{-dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$, cuius integralis per
 logarithmos imaginarios est $ml(t\sqrt{-1} + \sqrt{(1-tt)})$
 $= l(\frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a})$ seu $(t\sqrt{-1} + \sqrt{(1-tt)})^m =$
 $\frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a}$. Demittatur ex M in AC perpendi-
 culum MQ=y et posito CQ=u, erit 1:t=x:y
 atque $t = \frac{y}{x}$. Propterea prodibit $(\frac{y\sqrt{-1} + \sqrt{(x^2-y^2)}}{x})^m =$
 $\frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a}$. Vt sit $m=2$ seu $bf = \frac{a^2}{6}$, habebi-
 tur ista aequatio $(\frac{y\sqrt{-1} + u}{x})^2 = \frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a}$. Quae
 reducta dat hanc $x^3 = au^2 - ay^2 = ax^2 - 2ay^3$, seu
 $y = x\sqrt{\frac{a-x}{2a}}$ et $u = x\sqrt{\frac{a+x}{2a}}$. At si inter coordi-
 natas orthogonales u et y aequatio desideretur
 ea erit ordinis sexti haec $(y^2 + u^2)^3 = a^2(u^2 - y^2)^3$
 In hac curua applicata erit maxima si $x = \frac{2b}{3}$,
 seu si sumatur $CQ = \frac{2}{3}a\sqrt{\frac{5}{6}} = a\sqrt{\frac{10}{27}}$, tum enim
 erit $QM = \frac{2}{3}a\sqrt{\frac{2}{27}}$. In aliis vero ipsius m valo-
 ribus maxima applicata erit vbi est $my\sqrt{(a^2-x^2)}$
 $= ux$.

PROPOSITIO 34.

Problema.

306. Sit potentia sollicitans uniformis g, et Tab. VIII,
 ubique deorsum tendat, deturque curua AT, inue- Fig. 4.
 nire

nire curuam AM, super qua corpus ita descendat, ut tempus per arcum quemcunque AM proportionale sit radici quadratae ex applicata respondente PT curuae datae AT.

Solutio.

Ponatur abscissa communis $AP = x$, curuae AT applicata $PT = t$, dabitur ergo, quia curua AT datur aequatio inter x et t , quae talis esse debet, ut euanescente x fiat quoque $t = 0$, quia motus initium in A ponitur, et tempora a puncto A computantur. Sit porro curuae quaesitae AM applicata $PM = y$, et arcus $AM = s$. Debita sit celeritas initialis in A altitudini b . Erit ergo celeritas in M debita altitudini $b + gx$, et tempus quo arcus AM absoluitur $= \int \frac{dt}{\sqrt{b+gx}}$, quod aequale esse debet ipsi \sqrt{t} . Habebitur ergo haec aequatio $\int \frac{ds}{\sqrt{b+gx}} = \sqrt{t}$ seu $\frac{ds}{\sqrt{b+gx}} = \frac{ds}{2\sqrt{t}}$. Vnde $dt^2(b+gx) = 4t ds^2 = 4t dx^2 + 4t dy^2$, atque $dy = \frac{\sqrt{bdt^2 + gxdst^2 - 4tdx^2}}{2\sqrt{t}}$. Ex qua aequatione, cum t per x detur, curua quaesita AM construui poterit. Ita autem est construenda, ut posito $x = 0$ fiat quoque $y = 0$, quo curuae AM initium sit in A. Q. E. I.

Corollarium I.

307. Quo igitur curua sit realis, oportet, ut $bdt^2 + gxdst^2$ sit maius quam $4tdx^2$ seu $\frac{dt}{2\sqrt{t}}$

$\gtrsim \frac{dx}{\sqrt{b+gx}}$, siue integrando $\sqrt{t} \gtrsim \frac{2\sqrt{b+gx} - 2\sqrt{b}}{g}$.

Si enim fuerit $\sqrt{t} = \frac{2\sqrt{b+gx} - 2\sqrt{b}}{g}$, curua AM fit recta verticalis, super qua descensus fit celerrimus.

Corollarium 2.

308. Si igitur in curua AT alicubi fiat $\frac{dt}{2\sqrt{t}}$ aequale ipsi $\frac{dx}{\sqrt{b+gx}}$, ibi tangens curuae AM respondens erit verticalis. Atque si infra hunc locum sit $\frac{dt}{2\sqrt{t}} < \frac{dx}{\sqrt{b+gx}}$, curua AM non eousque descendet, sed habebit punctum reuerfionis in eo loco vbi tangens est verticalis.

Corollarium 3.

309. Si angulus quem curua AT in A cum verticali AP constituit fuerit acutus, cuius tangens $=m$, erit in initio A, $t=mx$, et $\frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{mdx}{2\sqrt{mx}} \gtrsim \frac{dx}{\sqrt{b+gx}}$, vnde $m(b+gx)$ maius esse debet quam $4x$, id quod semper accidit si b non fuerit $=0$. Tum autem erit $dy = \frac{dx\sqrt{bm^2+gm^2x-4mx}}{2\sqrt{mx}}$. Posito igitur $x=0$, fiet $\frac{dy}{dx} = \infty$, seu his casibus curuae AM tangens in A erit horizontalis; nisi sit $b=0$. At si $b=0$, erit $dy = \frac{dx\sqrt{gm-4}}{2}$. Ne igitur curua AM fiat imaginaria, debet gm maius esse quam 4, atque tum curua AM cum AP in A angulum acutum constituet, cuius tangens erit $\frac{\sqrt{gm-4}}{2}$.

Corollarium 4.

310. Sin vero angulus, quem curua AT in A cum verticali AP facit, fit rectus, fit $m = \infty$. Hoc ergo casu curuae AM tangens in A semper erit horizontalis, siue b fit $= 0$ siue secus.

Corollarium 5.

311. Si celeritas in A est $= 0$, et in principio A curua AT confundatur cum curua, cuius aequatio est $t = ax^n$, existente n numero affirmatiuo, quo crescente x quoque t crescat, erit $dt =$

$$anx^{n-1} dx \quad \text{et} \quad dy = \frac{dx \sqrt{(a^2 g n^2 x^{2n-1} - 4ax^n)}}{2 \sqrt{ax^n}}.$$

Nunc ne dy fiat imaginarium facto $x = 0$ debet esse $n > 2n-1$, seu $n < 1$, quibus casibus scilicet curua AT in A est normalis ad AP. Tum vero

$$\text{erit in puncto A, } dy = \frac{n dx \sqrt{ag}}{2 x^{\frac{1-n}{2}}} \quad \text{et} \quad y =$$

$$\frac{nx^{\frac{n+1}{2}} \sqrt{ag}}{n+1}, \quad \text{et radius osculi curuae AM in A} =$$

$$\frac{n^2 ag x^n}{2(n+1)}.$$

Ex quo sequitur curuae AM, cuius tangens in A est horizontalis, radium osculi in A debere esse infinite paruum, si corpus ex quiete super ea descendere posse debeat. Nisi enim radius osculi fuerit infinite paruus, corpus perpetuo in A quiescens permanebit.

Co-

Corollarium 6.

312. Si igitur corpus ex quiete descendere ponatur in A, quo curua AM fiat realis, debet $\frac{dt}{2\sqrt{t}}$ maius esse quam $\frac{dx}{\sqrt{2gx}}$ saltem in initio curuae AT. Quare si ponatur $\frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{dx}{\sqrt{2gx}} + p dx$, vbi p est quantitas affirmatiua saltem nisi x ponatur nimis magnum, erit $\sqrt{t} = \frac{2\sqrt{gx}}{g} + \int p dx$, vbi $\int p dx$ ita accipi debet, vt euanescat facto $x=0$. Hoc autem valore loco $\frac{dt}{2\sqrt{t}}$ substituto prodibit $\frac{ds}{\sqrt{gx}} = \frac{dx}{\sqrt{gx}} + p dx$ seu $s = x + \int p dx \sqrt{gx}$, pro curua quaesita AM. Vel inter x et y haec habebitur aequatio $y = \int dx \sqrt{(2p\sqrt{gx} + gppx)}$. Notandum vero est p non talem esse posse quantitatem, ex qua $\int p dx$ praescripto modo acceptum fiat infinite magnum.

Corollarium 7.

313. Ex dictis intelligitur, quamdiu p valorem affirmatiuum retineat, tamdiu curuam AM descendere: si fit $p=0$, et deinceps negatiuum, curua AM in illo loco habebit cuspidem, et reuertetur sursum. Si $p=\infty$, manente tamen $\int p dx$ finito, curua AM ibi habebit tangentem horizontalem.

Corollarium 8.

314. Si b non ponatur $=0$, ex eadem curua AT innumerabiles inueniri poterunt curuae AM, prout enim celeritas initialis maior minorue accipitur, alia prodit curua AM.

Scho-

Scholion.

315. Problematis huius maximus erit vsus in solutionibus sequentium problematum indeterminatorum, in quibus omnes curuae requiruntur, super quibus corpus eodem tempore vel ad datam rectam vel curuam lineam perueniat. Hanc ob rem indolem quantitatum t et p diligentius inuestigauimus, quo iis in sequentibus vti liceat.

PROPOSITIO 35.

Problema.

Tabula IX.
Fig. 1.

316. *Posita potentia sollicitante vniiformi g et deorsum directa, inuenire omnes curuas AMC, super quibus corpus in A ex quiete descensum incipiens dato tempore ad rectam horizontalem BC perueniat.*

Solutio.

Ponatur $AP=x$, $PM=y$, et $AB=a$. In curua AND exprimat PN supra sumtam quantitatem $\int p dx$, cuius curuae haec debet esse proprietas, vt in A cum axe AB concurrat, eiusque applicatae continuo vsque ad D saltem crescant, quo scilicet $p dx$ sit affirmatiuum. Nunc sumto $y = \int dx \sqrt{(2p \sqrt{gx} + gppx)}$ erit tempus per AMC $= \frac{2\sqrt{ga}}{g} + BD$ (312.). Quamobrem cum infinitae curuae huius indolis in locum curuae AND substitui queant, ex iis infinitae orientur curuae AMC, super quibus omni-
bus

bus corpus eodem tempore ex A ad lineam horizontalem BC pertingit. Ad hoc ergo obtinendum pro $\int p dx$ talis quantitas accipi debet, quae evanescat posito $x=0$, et fiat $=BD$ posito $x=a$, retinente p ubique per AND affirmativum valorem. Q. E. I.

Corollarium I.

317. Si facto $x=a$ fiat $p=0$, seu si curua AND in D perpendiculariter insistat horizontali CD, curua AMC quoque horizontali DC perpendiculariter insistet.

Corollarium 2.

318. Atque si posito $x=0$, fiat quoque $p=0$, tangens curvae AMC in A erit verticalis, idem vero quoque accidit, si $p \vee x$ fiat $=0$ posito $x=0$. At si $p \vee x$ fiat infinitum posito $x=0$, curua AMC in A habebit tangentem horizontalem.

Scholion I.

319. Intelligitur ergo problema hoc maxime esse indeterminatum, cum infinitis modis infinitae curvae AMC possint inueniri. Quamobrem insequentibus exemplis modum indicabimus quotcunque libuerit series infinitarum curvarum quaesito satisfaciendum inueniendi.

Exemplum I.

320. Ponatur $PN = \int p dx = z$ et $BD = \sqrt{b}$, ita ut tempus descensus esse debeat $= \frac{2\sqrt{ga}}{g} + \sqrt{b}$. Sumatur pro curua AND haec aequatio $z = \alpha x^2 + \beta x$, quae hanc iam habet proprietatem, ut $\int p dx$ seu z evanescat posito $x = 0$. Nunc quia facto $x = a$ fieri debet $z = \sqrt{b}$, habebitur $\sqrt{b} = \alpha a^2 + \beta a$, hincque $\beta = \frac{\sqrt{b}}{a} - \alpha a$, ideoque $z = \alpha x^2 + \frac{x\sqrt{b}}{a} - \alpha ax$. Deinde quia p seu $\frac{dz}{dx}$ affirmativum semper habere debet valorem si $x < a$, debet esse $2\alpha x + \frac{\sqrt{b}}{a} - \alpha a$ affirmativum. Quare oportet esse $\sqrt{b} > \alpha a^2$, ponatur ideo $\sqrt{b} = \alpha a^2 + \alpha af$ erit $\alpha = \frac{\sqrt{b}}{a^2 + af}$. Quo substituto habebitur $z = \frac{x^2\sqrt{b} + fx\sqrt{b}}{a^2 + af}$, quae aequatio substituendis loco f innumerabilibus valoribus affirmativis, infinitas dat curuas AND. Fiet autem $p = \frac{dz}{dx} = \frac{2x\sqrt{b} + f\sqrt{b}}{a^2 + af}$ et $p\sqrt{gx} = \frac{2x\sqrt{gbx} + f\sqrt{gbx}}{a^2 + af}$; ex qua patet omnes hinc orientes curuas AMC tangere rectam AB in A. Aequatio vero pro curvis AMC erit haec $y = \int \frac{dx}{a^2 + af} \sqrt{(2a(a+f)(2x+f)\sqrt{gbx} + gbx(2x+f)^2)}$. Quae infinitas continet curuas problemati satisfaciennes, super quibus omnibus tempus descensus ad lineam horizontalem est $= \frac{2\sqrt{ga}}{g} + \sqrt{b}$.

Corollarium 3.

321. Hae autem lineae omnes sunt rectificabiles. Nam cum sit $\frac{ds}{\sqrt{gx}} = \frac{dx}{\sqrt{gx}} + p dx$, erit $s = x + \int p dx \sqrt{gx}$.

$$\sqrt{gx}. \text{ Est vero } \int p dx \sqrt{gx} = \frac{\frac{4}{5}x^2 \sqrt{gbx} + \frac{2}{3}fx \sqrt{gbx}}{a^2 + af}$$

$$\text{Vnde tota curua AMC erit} = a + \frac{(\frac{4}{5}a + \frac{2}{3}f) \sqrt{gab}}{a + f}$$

Corollarium 4.

322. Inter has igitur curuas AMC longif-
sima prodit si $f=0$, erit enim tum $AMC = a + \frac{4}{5}\sqrt{gab}$. Et pro hac erit aequatio ista $y = \int \frac{2dx}{a^2} \sqrt{(a^2x \sqrt{gbx} + gbx)}$. Breuissima vero habetur fa-
cto $f=\infty$, tum enim erit $AMC = a + \frac{2}{3}\sqrt{gab}$.
Et aequatio pro hac curua erit $y = \int \frac{dx}{a} \sqrt{(2a \sqrt{gbx} + gbx)}$.

Scholion 2.

323. Omnes curuae AND sub aequatione $z = \frac{x^2 \sqrt{b+fx} \sqrt{b}}{a^2 + af}$ contentae sunt parabolae, adeo vt per solas parabolas innumerabiles inuentae sint curuae problemati satisfaciennes. Neque vero omnes parabolae in hac aequatione continentur, sed loco illius aequationis, si adhibeatur haec, $z^2 + z \sqrt{f} = \frac{x(b + \sqrt{bf})}{a}$, quae etiam infinitas parabolas continet, iterum infinitae curuae AMC inuenientur, super quibus corpus dato tempore descensum absoluit. Ex quo intelligi potest quoties infinitae inueniri queant curuae AMC, si tantum sectiones conicae in locum curuae AND sub-

T 2

stituan-

stituantur. Sumta enim pro curua AND hac aequatione $z^2 + az = \beta x^2 + \gamma x + \gamma x + \delta xz$, quae omnes continet sectiones conicas per punctum A transeuntes, fieri debet $b + a\sqrt{b} = \beta a^2 + \gamma a + \delta a\sqrt{b}$, atque $\frac{\gamma}{a}$ et $\frac{2ba + \gamma + \delta\sqrt{b}}{a + 2\sqrt{b} - \delta a}$ debent esse quantitates positivae, quod quam infinitis modis fieri possit, facile perspicitur. Si deinde omnes curvae algebraicae considerentur, atque postmodum quoque curvae transcendentes simul, maxima copia curvarum simul descriptarum concipi poterit.

Exemplum 2.

324. Sumatur pro curua AND haec aequatio generalis $z = \frac{x^n \sqrt{b}}{a^n}$, denotante n numerum affirmatiuum quemcunque; euanescet z posito $x=0$, fietque $z = \sqrt{b}$ posito $x=0$ ut requiritur: praeterea vero quoque erit p seu $\frac{dz}{dx} = \frac{nx^{n-1}\sqrt{b}}{a^n}$ quantitas affirmatiua. Cum igitur sit $p\sqrt{g}x = \frac{nx^{n-\frac{1}{2}}\sqrt{gb}}{a^n}$

erit $y = \int \frac{dx}{a^n} \sqrt{(2na^n x^{n-\frac{1}{2}} \sqrt{gb} + n^2 gb x^{2n-1})}$.

Quae aequatio infinitas curuas AMC complectitur, quae omnes erunt rectificabiles. Erit enim

$$AM = x + \frac{2nx^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{gb}}{(2n+1)a^n}, \text{ ideoque } AMC = a + \frac{2n\sqrt{ab}}{2n+1}.$$

Co-

Corollarium 5.

325. Si fuerit $n = \frac{1}{2}$ erit $y = \int \frac{dx\sqrt{gb+4\sqrt{gab}}}{2\sqrt{a}}$
 atque $y = \frac{x\sqrt{gb+4\sqrt{gab}}}{2\sqrt{a}}$ et $AM = x(1 + \frac{\sqrt{gab}}{2a})$. Qua-
 re curua abit in lineam rectam inclinatam super
 qua descensus fit tempore $= \frac{2\sqrt{ga}}{g} + \sqrt{b}$. Perspi-
 citur ergo dari lineas breuiores recta hac incli-
 nata, super quibus corpus dato tempore ex A ad
 horizontalem BC peruenit: facto enim $n < \frac{1}{2}$ li-
 nea AMC fit breuior.

Scholion 3.

326. Ceterum si detur vnica curua AND de-
 fideratam curuam AMC praebens, ex ea ipsa in-
 numerabiles aliae poterunt inueniri. Data enim
 vnica aequatione inter z et x capiatur $PN =$
 $\frac{(ma - (m-1)x)z}{a}$, vnde pro diuerso ipsius m valore in-
 numerabiles curuae orientur. Simili modo poni

etiam potest $PN = \frac{(max^n - (m-1)x^{n+1})z}{a^{n+1}}$ fit

enim $PN = z = \sqrt{b}$ si ponatur $x = a$. Atque ge-
 neraliter si fuerit P functio quaecunque ipsarum x et z ,
 A vero eadem functio quae prodit facto $x = a$ et $z = \sqrt{b}$,
 accipi poterit $PN = \frac{Pz}{A}$. Debebit autem P talis ef-
 se functio vt Pz euanescat facto $x = 0$ et $z = 0$,
 et diff. PN diuisum per dx debet esse quantitas
 affirmatiua, saltem quamdiu est $x < a$.

T 3

Scho-

Scholion 4.

327. Simili modo problema generalissime soluetur, si designante P quamcunque functionem ipsius x euanescentem si est $x=0$, et A eam quantitatem in quam abit P si sit $x=a$, sumatur $z = \frac{Pyb}{A}$ pro generalissima aequatione curuae AND. Sit deinde $dP=Qdx$, debebit Q esse quantitas affirmatiua, quamdiu x non superat a ; erit $p = \frac{Qyb}{A}$ atque hinc $y = \int \frac{dx}{A} V(2AQ\sqrt{gbx} + gbQQx)$, quae est generalissima aequatio pro curuis AMC, quae omnes a corpore descendente proposito tempore absoluentur. Apparet hoc modo curuas transcendentibus quoque in locum curuarum AND substitui posse, quibus casibus tempus, quo quaeuis curuae AMC portio absoluitur, agebraice non potest definiri. Si $Q\sqrt{gbx}$ ponatur $= R$, erit $y = \int \frac{dx}{A} V(2AR + RR)$. Sumto ergo loco R quacunque functione ipsius x , ad inueniendam A integrari debet $\frac{Rdx}{\sqrt{gbx}}$ ita vt euanescat posito $x=0$, deinde poni oportet $x=a$, et quod prouenit erit $= A$. Hic vero hoc tantum est monendum vt pro R sumatur quantitas affirmatiua, quamdiu x non excedit a , et caueri debet ne $\int \frac{Rdx}{\sqrt{gbx}}$ fiat infinitum si praescripto modo accipiat.

PROPOSITIO 36.

Problema.

Tabula IX.
Fig. 2.

328. Posita potentia sollicitante uniformi g et ubique deorsum directa, inuenire omnes curuas AMC super

super quibus corpus ex A dato tempore ad rectam BC ad horizontem utcunque inclinatum descendat.

Solutio.

Exprimat curvae AND applicata BD tempus, quo corpus ex A ad rectam BC pertingit, et ducta per quodvis punctum M recta MQ parallela rectae datae BC secante verticalem AB in Q exprimat applicata QN tempus, quo corpus partem AM percurrit. Quare si infinitae curvae AND concipiantur, quae omnes in B eandem habeant applicatam BD, hae omnes generabunt curvas AMC super quibus corpus dato tempore ab A ad rectam BC pervenit. Curvae autem AND ut supra monitum concurrere debent in A cum verticali AB, et vsque ad D diuergere debent ab AB. Ponatur nunc tangens anguli ABC = k , sitque AP = x , PM = y , AQ = u , QN = t , et AP = a erit PQ = $\frac{y}{k}$, ideoque $x + \frac{y}{k} = u$. Quia autem celeritas in M debita est altitudini gx erit tempus per AM = $\int \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{gx}}$ quod aequale esse debet ipsi QN = t , erit adeo $dt = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{gx}}$ et $gx dt^2 = dx^2 + dy^2$. At ob curvam AND datam, dabitur t in u , et cum sit $u = x + \frac{y}{k}$ dabitur t per x et y quamobrem habebitur aequatio inter x et y pro curua quaesita AMC. Vel cum sit $y = ku - kx$, erit $gx dt^2 = (k^2 + 1) dx^2 - 2k^2 du dx + k^2 du^2$, ex qua aequatione x per u inuenire licebit. Sit ad hoc $dt = p du$, erit $gx p^2 du^2 = (k^2 + 1) dx^2 - 2k^2$
 $dudx$

$$du dx + k^2 du^2, \text{ atque } dx = \frac{k^2 du + \sqrt{(g(k^2 + 1)p^2 x - k^2) du^2}}{k^2 + 1}$$

Curua igitur AND talis accipi debet vt vbique p maius sit quam $\frac{k}{\sqrt{gx(k^2 + 1)}}$. Aequatio illa autem ita debet integrari vt facto $u=0$ fiat $x=0$. Quo facto quoque eruetur aequatio inter x et y pro curua quaesita. Q. E. I.

Corollarium I.

329. Curua AMC tanget in A rectam AB si fit $dy=0$, posito $x=0$; tum vero debebit esse $du=dx$, atque $1 = \sqrt{(g(k^2 + 1)p^2 x - k^2)}$. Quare hoc eueniet si fit $ppx = \frac{1}{g}$ facto $x=0$. Quia autem hoc casu est y infinities minor quam x , erit in ipso initio $x=u$; ex quo sequitur curuam AMC in A tangere verticalem AB si fuerit $ppu = \frac{1}{g}$ posito $u=0$.

Corollarium 2.

330. Deinde curua AMC normalis erit in QM si fuerit $PQ = \frac{y}{k} = \frac{y dy}{dx}$ seu $dx = k dy$, $= k^2 du - k^2 dx$, siue $dx = \frac{k^2 du}{k^2 + 1}$. Hoc vero eueniet vbi erit $p^2 x = \frac{k}{g(k^2 + 1)}$.

Corollarium 3.

331. In ipso puncto A expressio ppx vel finitum valorem eumque maiorem quam $\frac{k k}{g(k^2 + 1)}$ habebit facto $x=0$; vel infinite magnum. In posteriore casu erit $dx = \pm \infty du$, et cum sit $dx = dx +$

$+ \frac{dy}{k}$, erit $dy = -k dx$. Quibus casibus tangens curvae AMC in A parallela erit rectae BC.

Exemplum.

332. Sit curua AND parabola quaecunque, ita vt sit $t = \frac{2\alpha\sqrt{u}}{\sqrt{gu}}$ erit $dt = \frac{\alpha du}{\sqrt{gu}}$, et $p = \frac{\alpha}{\sqrt{gu}}$, unde habebitur ista aequatio, $(k^2 + 1) dx - k^2 du = + \frac{du \sqrt{(\alpha^2(k^2 + 1)x - k^2 u)}}{\sqrt{u}}$. Huius aequationis integralis est $C = (+ \sqrt{(\alpha^2(k^2 + 1)x - k^2 u)} + A\sqrt{u})^\pi (+ \sqrt{(\alpha^2(k^2 + 1)x - k^2 u)} + B\sqrt{u})^q$. Existente $A = \frac{\alpha^2 + \sqrt{(\alpha^4 - 4(1 - \alpha^2)k^2)}}{2}$ et $B = \frac{\alpha^2 - \sqrt{(\alpha^4 - 4(1 - \alpha^2)k^2)}}{2}$ et $\pi = \frac{-2A}{A-B}$ atque $q = \frac{2B}{A-B}$. Cum igitur sit π numerus negatiuus, erit $C (+ \sqrt{(\alpha^2(k^2 + 1)x - k^2 u)} + A\sqrt{u})^{-\pi} = (+ \sqrt{(\alpha^2(k^2 + 1)x - k^2 u)} + B\sqrt{u})^q$, vbi C denotat constantem, quae efficiat vt posito $x=0$ fiat $u=0$. Manifestum autem est quaecunque fuerit constans, semper fieri $u=0$ posito $x=0$, excepto casu quo q vel π euanescit. At π euanescere non potest, q vero euanescit casu quo $\alpha=1$, hoc igitur casu debet esse $C=\infty$, fietque $+ \sqrt{(\alpha^2(k^2 + 1)x - k^2 u)} + \alpha^2\sqrt{u}=0$, seu $u=x$ et $y=0$; quare satisfacit hoc casu recta verticalis AB. Reliquis casibus vero ob C arbitriariam quantitatem ex vnica curua AND innumerabiles curuae AMC inveniuntur. Vnicus porro casus est seorsum tractandus, si $A=B$ seu $k^2 = \frac{\alpha^4}{4(1-\alpha^2)}$ tum enim erit $lu = C - 2 l(r + \frac{\alpha^2}{2}) + \frac{\alpha^2}{r + \frac{\alpha^2}{2}}$ existente $r =$

Tom. II. U $\sqrt{(\alpha^2$

$\frac{\sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x-k^2u)}}{\sqrt{u}}$. Consequenter pro hoc casu habebitur haec aequatio $C=2 \int (\sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x-k^2u)} + \frac{\alpha^2\sqrt{u}}{2}) + \frac{\alpha^2\sqrt{u}}{\sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x-k^2u)+\frac{\alpha^2\sqrt{u}}{2}}}$, vbi C quoque determinatione non opus habet. Si est $\alpha > 1$ fit B et hinc quoque p numerus negatiuus, tum ergo debet esse $C = \infty$. Hoc ergo casu erit vel $A\sqrt{u} = \sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x-k^2u)}$ vel $B\sqrt{u} = \sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x-k^2u)}$. Quae duae aequationes sunt pro lineis rectis certo modo inclinatis et per A transeuntibus: haeque etiam generaliter satisfaciunt. Vt si fuerit $\alpha=1$, erit $A=1$ et $B=0$, hincque hae aequationes $u=x$ seu $y=0$ et $u=\frac{(k^2+1)x}{kk} = x + \frac{y}{k}$ seu $x=ky$, quae est linea recta perpendicularis in BC, haec enim a corpore eodem tempore percurritur, quo verticalis BC.

Corollarium 4.

332. Nisi igitur sit $\alpha=1$ vel $\alpha > 1$, innumerabiles lineae curuae inueniuntur problemati satisfaciennes; quae ergo omnes minore tempore absoluentur, quam perpendicularis AB.

Corollarium 5.

333. Cum ergo ex vnica curua AND infinitae oriri queant curuae AMC, facile intelligitur infinities plures curuas huic quaestioni satisfacere, quam praecedenti.

Co-

Corollarium 6.

334. Si $\alpha < 1$ effici potest determinanda constante C, ut curua quaesita per datum punctum rectae BC transeat. Deinde aliis assumendis curuis AND simili modo infinitae curuae poterunt inueniri, super quibus corpus non solum dato tempore ad rectam BC perueniat, sed ad quodvis in ea punctum datum C.

Scholion I.

335. In hoc exemplo casus quo $\alpha = 1$ bis occurrit, prima enim vice linea recta verticalis tantum satisfaciens est inuenta, altera vice praeter hanc rectam alia inclinata, utroque tamen modo eadem aequatione generali sumus vsi. Saepius autem iam huiusmodi casus obtigerunt, in quibus aequationes differentiales continent in se aequationes integrales, quae nihilominus per integrationes non eruuntur. Vt in casu $\alpha = 1$ haec habetur aequatio differentialis, $\frac{(k^2+1)dx - k^2du}{\sqrt{(k^2+1)x - k^2u}} = \frac{+du}{\sqrt{u}}$ quae integrata dat $x = u$. Interim tamen perspicuum est hanc aequationem $k^2u = (k^2 + 1)x$ in illa quoque contineri, etiamsi per integrationem non prodeat. Et hanc ob rem posterior aequatio integralis aequae satisfacit ac prior $x = u$. Hinc generaliter colligere licet aequationem differentialem $\frac{dt}{T} = Vdu$, in qua T est talis functio ipsius t , quae evanescat posito $t = 0$, et V functio quaecunque ipsius u , aequae comprehendere hanc in-

tegralem $t=0$ ac hanc $\int \frac{dt}{T} = \int V du$, quae per integrationem elicitur. Plerumque quidem casus $t=0$, si t est simplex quantitas negligi potest, at si t est quantitas composita vt in nostro casu, perperam omittitur. Similem casum supra habuimus §. 300. in aequatione $ds = \frac{-dx\sqrt{b}}{\sqrt{(a^2b-bx^2-a^2\int Pdx)}}$ vbi obseruauimus aequationem $x=a$ in ea contineri, etiamsi integratio nequidem possit perfici. Nam posito $a-x=t$ erit $-dx=dt$ et $V(a^2b-bx^2-a^2\int Pdx)$ erit functio ipsius t , quae fit $=0$ si fit $t=0$ seu $x=a$; namque $\int Pdx$ ita accipi iubebatur, vt euanescat posito $x=a$. Posita ergo hac ipsius t functione $=T$ erit $ds = \frac{dt\sqrt{b}}{T}$, ex qua aequatione ergo tuto concludi licet, satisfacere aequationem $t=0$ seu $x=a$, ideoque problemati illi satisfacere circulum, vt ibi inuimus. (303.) Magis vniuersaliter vero in hac aequatione $Vdu = \frac{dt}{T}$, si T non euanescit posito $t=0$, comprehendetur ista aequatio $T=0$, ex qua erit $t =$ constanti quantitati, ideoque $dt=0$. Vnde intelligitur $T=0$ contineri in aequatione proposita $Vdu = \frac{dt}{T}$. Atque hinc si t fuerit quantitas composita v.g. ex u et x statim habetur aequatio integralis, per integrationem vix eruenda.

Scholion 2.

336. Casus hic superest, qui peculiarem resolutionem requirit, quando recta BC supra punctum

Atum A cum BA concurrat, et quando est parallela. Considerabimus autem sequente problemate tantum casum, quo fit BC parallela verticali AB et in data distantia posita; ex quo simili modo casum rectae BC utcumque inclinatae deducere licebit.

PROPOSITIO 37.

Problema.

337. *Sollicitetur corpus perpetuo deorsum vi uniformi g; inuenire curuas innumerabiles, super quibus corpus ex A motum a quiete incipiendo, dato tempore ad rectam verticalem EC perueniat.*

Tab. IX.
Fig. 3.

Solutio.

Sit AMC curua quaecunque quaesitarum, et pro axe sumatur recta verticalis AB, dicatur $AP = x$, $PM = AQ = y$; erit celeritas in M debita altitudini gx , et tempus per AM $= \int \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{\sqrt{gx}}$. Sit porro AND curua, cuius quaevis applicata QN exprimat tempus per AM, et sit $QN = t$ functioni ipsius y , poterit ex curua AND data curua AMC inueniri. Quare si infinitae curuae AND concipiantur, quae omnes in E communem habeant applicatam DE, omnes producent curuas AMC super quibus corpus dato tempore per DE expresso ex A ad CE perueniet. Erit itaque $t = \int \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{\sqrt{gx}}$ et posito $dt = p dy$ erit $gp^2 x dy^2 = dx^2$

$+dy^2$, atque $dx = dy \sqrt{gp^2x - 1}$. Quae ita integrata, ut posito $x=0$ fiat $y=0$, dabit curvas AMC quaesitas. Sit R functio quaecunque ipsius y et $\int R dy$ ita capiatur ut evanescat posito $y=0$. Tum fiat $\int R dy = A$ posito $y=AE=a$, et existente $DE = \sqrt{b}$ sumatur $t = \frac{\sqrt{b} \int R dy}{A}$, erit $p = \frac{R\sqrt{b}}{A}$ atque $dx = \frac{dy}{A} \sqrt{gbR^2x - A^2}$. Quae aequatio, quicquid pro R substituatur, dabit innumeras curvas quaesito satisfaciennes. Q. E. I.

Corollarium I.

338. Casus ergo habetur simplicissimus, si fuerit $R=1$, tum enim aequatio separabilis prodit. Erit vero $t = \frac{\sqrt{b}}{a}$, ob $A=a$. Hanc ob rem fit $\frac{adx}{\sqrt{gbx-a^2}} = dy$, atque $\frac{2a}{gb} \sqrt{gbx-a^2} = y$. Qui autem nullius est utilitatis, ob valorem ipsius y imaginarium.

Corollarium 2.

339. Quia autem $\sqrt{gbR^2x - A^2}$ non potest esse quantitas imaginaria, oportet sit $R^2x > \frac{A^2}{gb}$ etiam si $x=0$. Quare R neque quantitas constans esse potest, neque functio ipsius y , quae evanescat facto $y=0$. Hanc ob rem R talis esse debet functio ipsius y , quae fiat $=\infty$, si ponatur $y=0$. Praeterea tamen eiusmodi esse debet, ut $\int R dy$ non fiat infinitum quod eveniret si esset $R = \frac{1}{y}$ vel $\frac{1}{y^2}$ etc.

Exem-

Exemplum.

340. Ponamus ergo esse $R = \frac{1}{\sqrt{y}}$, erit $\int R dy = 2\sqrt{y}$ et $A = 2\sqrt{a}$. Hinc habebitur ista aequatio $2dx\sqrt{ay} = dy\sqrt{(gbx-4ay)}$. Quae aequatio quia est homogenea ponatur $x=qy$, erit $2qdy\sqrt{a} + 2y dq\sqrt{a} = dy\sqrt{gbq-4a}$ seu $\frac{dq}{\sqrt{(gbq-4a)-2q\sqrt{a}}} = \frac{dy}{2y\sqrt{a}}$. Posito $\frac{gb}{4a} = n$ et $\sqrt{(nq-1)} = r$ erit $\frac{dy}{y} = \frac{-2rdr}{r^2-nr+1}$. Quae posterior formula a quadratura circuli pendebit, si $n < 2$. Hoc vero casu erit integrale $ly = lC + \frac{n-\sqrt{(n^2-4)}}{\sqrt{(n^2-4)}} l(2r-n+\sqrt{(n^2-4)}) - \frac{n+\sqrt{(n^2-4)}}{\sqrt{(n^2-4)}} l(2r-n-\sqrt{(n^2-4)})$. Quae ob $r = \frac{\sqrt{(nx-y)}}{\sqrt{y}}$ abit in hanc $C(2\sqrt{(nx-y)}-(n-\sqrt{(n^2-4)}))\sqrt{y} - \frac{n-\sqrt{(n^2-4)}}{\sqrt{(n^2-4)}} (2\sqrt{(nx-y)}-(n+\sqrt{(n^2-4)}))\sqrt{y} + \frac{n+\sqrt{(n^2-4)}}{\sqrt{(n^2-4)}} (2\sqrt{(nx-y)}-(n-\sqrt{(n^2-4)}))\sqrt{y}$. Vbi pro C constantem quamcunque accipere licet, quia ipsa aequatio ita est comparata, ut posito $x=0$ fiat $y=0$. Per methodum autem supra traditam (335) ex aequatione differentiali statim habetur haec integralis $2q\sqrt{a} = \sqrt{(gbq-4a)}$ seu $2x\sqrt{a} = \sqrt{(gbx-4ay)}$ vnde oritur $\frac{y}{x} = \frac{gb \pm \sqrt{(g^2b^2-64a^2)}}{8a}$, quae dat duas lineas rectas, nisi sit $gb < 8a$, quo casu aequatio est imaginaria. In casu quo $n=2$ erit $\frac{dy}{y} = \frac{-2rdr}{(r-1)^2}$ seu $ly = -2l(r-1) + \frac{2}{r-1}$, vnde fit $ly = -2l(\sqrt{(2x-y)}-\sqrt{y}) + 2l\sqrt{y} + \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{(2x-y)}-\sqrt{y}} + lC$, seu $l(\sqrt{(2x-y)}-\sqrt{y})-lC = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{(2x-y)}-\sqrt{y}}$. Vbi etiam pro C quantitatem quamcunque accipere licet. Si $n < 2$, tum constructio curvae partim a logarith-
mis

mis partim a quadratura circuli pendet; fiunt enim ob $\sqrt{n^2-4}$ imaginarium logarithmi inuenti imaginarii. Hoc igitur casu expedit constructionem perficere prae expressione analytica.

PROPOSITIO 38.

Problema.

Tabula IX.
Fig. 4.

341. *Sollicitetur corpus perpetuo deorsum vi uniformi g, dataque sit curua quaecunque BSC inuenire omnes curuas AMC, super quibus corpus descendendo ex A dato tempore ad curuam BSC perueniat.*

Solutio.

Sit curuarum quaesitarum quaecunque AMC, per cuius quodvis punctum M ducatur curva MQ similis curuae BSC respectu puncti fixi A. et exprimat curuae AN applicata NQ tempus per arcum AM: exponet ergo applicata BD tempus per totam curuam AMC. Quo facto poterit vicissim ex data curua AND curua AMC inueniri. Quare si infinitae curuae AND concipiantur, quae omnes in B habeant applicatam BD communem, eae generabunt infinitas curuas AMC, super quibus omnibus corpus ex A descendendo dato tempore per BD expresso ad curuam BSC perueniat. Sit nunc $AB = a$, $BD = \sqrt{b}$, et arcui QM abscindatur arcus similis BS ex curua data BSC, erit $AQ:AB = PM:RS = AP:AR = PQ:BR$. Ponatur porro
AP

$AP = x$; $PM = y$; $AQ = u$; $QN = t$; $AR = r$; $RS = s$, dabitur ob curuam BSC datam aequatio inter r et s , atque ob curuam AND datam dabitur aequatio inter t et u . At ob similitudinem erit $u : a = y : s = x : r$, vnde erit $y = \frac{us}{a}$, et $x = \frac{ur}{a}$. Celeritas deinde corporis in M debita est altitudini gx , ex qua tempus per AM erit $= \int \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{\sqrt{gx}}$ quod aequale poni debet ipsi t ; vnde oritur ista aequatio $gx dt^2 = dx^2 + dy^2$. Quia autem t per u datur sit $dt = p du$, et p sit functio ipsius u ; atque ob $dx = \frac{u dr + r du}{a}$ et $dy = \frac{u ds + s du}{a}$, transibit illa aequatio in hanc: $garup^2 du^2 = (u dr + r du)^2 + (u ds + s du)^2$. At quia curua BSC datur, erit s functio ipsius r sitque $ds = q dr$, existente q functione ipsius r quacunque. His substitutis habebitur aequatio inter u et r ista $garup^2 du^2 = (u dr + r du)^2 + (u q dr + s du)^2$. Quae radice quadrata extracta dat $\frac{dr}{du} = \frac{-r - sq + \sqrt{(2rsq - s^2 - r^2q^2 + garup^2(1 + qq))}}{u(1 + qq)}$. Ex qua si aequatio inter r et u inueniatur, inde habebitur simul aequatio inter x et y pro curua quaesita. Quod autem ad curuam AND attinet, sit P functio quaecunque ipsius u , et $\int P du$ ita integratum vt euanescat facto $u = 0$, et fiat $= A$ posito $u = a$, tum fumatur $t = \frac{\sqrt{b} \int P du}{A}$, pro aequatione curuae AND. Erit ergo $p = \frac{P \sqrt{b}}{A}$, vbi pro P functionem quamvis ipsius u ponere licet. Q.E.I.

Corollarium I.

342. Si u ponatur $= 0$, eo ipso quoque x et y euanescent, nisi forte fiat r vel s infinitum. Illo igitur casu in integratione aequationis differentialis inuentae constantem quamcunque addere licet, quia non opus est vt r datum habeat valorem, si u fit $= 0$.

Corollarium 2.

343. Tum igitur ob constantem arbitrariam addendam ex vnica curua AND data innumerabiles inueniuntur curuae AMC quaesito satisficientes.

Corollarium 3.

344. Si curua BSC ita est comparata, vt nusquam neque r neque s fieri queat infinite magnum, semper vnica curua AND infinitas dabit curuas quaesitas A M C. Quae non solum hanc habebunt proprietatem, vt corpora super iis descendencia simul ad datam BSC perueniant; sed quoque simul ad quam vis datae similem curuam QM pertingent.

Corollarium 4.

345. Cum igitur in integratione aequationis inuentae constantem quamcunque addere liceat,

ceat, ea ita poterit assumi vt curua AMC ad datum punctum C curuae datae BSC dirigatur. Hoc-
qua modo infinitae curuae AMC poterunt inue-
niri, quae omnes in dato puncto C conueniant.

Scholion I.

346. Posuimus curuas QM similes curuae
 BSC vt curua ipsa in A erecta fiat infinite par-
ua et omnia puncta curuae BSC in A conue-
niant, et x et y euanescent posito $u=0$. Po-
tuissimus autem eodem modo curuas QM vel
cum BSC congruentes ponere, vel discrepantes
lege quacunque. Vt fit Q functio ipsius u quae-
cunque euanescent posito $u=0$, abeatque ea in B ,
facto $u=a$, curua QM ita pendere poterit a cur-
ua BSC vt fit $x=\frac{Qr}{B}$ et $y=\frac{Qs}{B}$: namque facto
 $u=a$, curua QM transibit in ipsam BSC , et in A
curua in punctum transibit, nisi curua BSC in in-
finitum progrediatur. At etiam hoc casu pro Q
talis accipi poterit functio, vt etiam si fiat $r=\infty$,
tamen Qr et Qs fiat $=0$ si $u=0$. Posito autem
 $dQ=Vdu$, habebitur aequatio generalis sequens
 $Qdr(1+qq)+Vdu(r+sq)=duV(\frac{e^b BP^2 Qr(1+qq)}{\lambda^2} - (Vs$
 $-Vrq)^2)$. Quae aequatio latissime patet, et ex
vnica curua AND infinite infinitas curuas AMC
suggeret, quin etiam infinitas suppeditabit, quae
per datum punctum C transeunt.

Scholion 2.

347. Quantumvis generalis autem est haec aequatio, tamen curua QM est similis curuae BSC , quia est $x:y=r:s$. Quare adhuc generalior solutio poterit exhiberi, in qua curuae QM vtcunque dissimiles ponuntur curuae BSC eiusmodi tamen ut QM in BSC abeant facto $u=a$. Obtinebitur vero haec solutio, si R sumatur functio quaecunque ipsius u euanescebat facto $u=0$, abeatque R in D posito $u=a$, sitque $dR=Wdu$. Sumatur enim $x=\frac{Qr}{B}$ et $y=\frac{Rb}{D}$; abibit x in r et y in s si fiat $u=a$, atque euanescente u tam x quam y euanescent, quicquid sit r . Hinc autem sequens orietur aequatio generalissima: $dr(D^2Q^2+B^2R^2q^2)+du(D^2QVr+B^2RWqs)=+duV(\frac{gBD^2bP^2QR(D^2Q^2+B^2R^2q^2)}{\Lambda^2}-B^2D^2(RVqr-QWs)^2)$. In hac aequatione loco dr introduci potest ds ponendo $\frac{ds}{q}$ loco dr , vel etiam loco r poterit x introduci ponendo loco r eius valorem $\frac{Bx}{Q}$, et tum habebitur aequatio inter u et x . Notandum autem est quia Q euanescebat facto $u=0$, P talem esse debere functionem ipsius u , ut P^2Q posito $u=0$, vel fiat quantitas finita vel infinite magna, at tamen cauendum est ne $\int Pdu$ debito modo sumtum fiat infinite magnum.

Corollarium 5.

348. Aequatio in solutione inuenta fit separabilis, si fuerit $P=\frac{1}{\sqrt{u}}$; erit $A=2\sqrt{a}$ et $p=\frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{au}}$.
Habe-

Habebitur enim $\frac{du}{u} = \frac{dr(1+qq)}{-r-sq \pm \sqrt{\left(\frac{gbr}{4}(1+qq) - (s-rq)^2\right)}}$
dantur enim s et q per r .

Corollarium 6.

349. Simili modo aequatio Schol. I. separationem admittet, si fuerit $P^2Q = V^2$ seu $P = \frac{V}{\sqrt{Q}}$

Habebitur enim $\frac{dr(1+qq)}{-r-sq \pm \sqrt{\left(\frac{gBbr}{\Lambda\Lambda}(1+qq) - (s-rq)^2\right)}} =$
 $\frac{V du}{Q} = \frac{dQ}{Q}$, in qua indeterminatae u et r sunt a se inuicem separatae.

Exemplum I.

350. Manente $P^2Q = V^2$ seu $\int P du = 2\sqrt{Q}$
ob $V du = dQ$, erit facto $u = a$; $A = 2\sqrt{B}$. Vnde fit $\frac{dQ}{Q} = \frac{dr(1+qq)}{-r-sq \pm \sqrt{\left(\frac{gbr}{4}(1+qq) - (s-rq)^2\right)}}$. Ha-

bebit ergo $\int P du$ requisitam proprietatem, ut evanescat facto $u = 0$; evanescit enim Q . Sit nunc curua BSC circulus super diametro AB descriptus, erit $s = \sqrt{ar - r^2}$, et $q = \frac{a-2r}{2\sqrt{ar-r^2}}$ atque $1+qq = \frac{a^2}{4(ar-r^2)}$, his valoribus loco s et q substitutis prodibit ista aequatio $\frac{dQ}{Q} =$

$$\frac{adr}{(-2\sqrt{ar-rr}) \pm r\sqrt{(gbr-4r^2)}\sqrt{(ar-r^2)}}. \text{ Quae aequa-}$$

tio non solum indeterminatas a se inuicem habet separatas, sed etiam generaliter per logarithmos integrari potest: potest enim in aequatione $\frac{dQ}{Q} = \frac{adr}{-2ar + 2r^2 \pm r\sqrt{(gb-4r)(a-r)}}$ membrum irrationale rationale effici. Prodibit autem integralis haec $IQ = \frac{4a}{4a-gb} \int \frac{2\sqrt{(a-r) \pm \sqrt{(gb-4r)}}}{\sqrt{r}} + \frac{\sqrt{gab} \sqrt{a(gb-4r) \pm \sqrt{gb(a-r)}}}{4a-gb} + I.C.$ Notari hic convenit casum quo $gb=4a$ seu $\sqrt{b} = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{g}}$, quo tempus per quamvis curuam AMC aequale ponitur tempori descensus per rectam verticalem AB; tum enim erit $\frac{dQ}{Q} = \frac{adr}{-2(ar-r^2) \pm 2(ar-r^2)}$. Si igitur signum $+$ valeat, erit $dr=0$, ex $r=\text{const.}=c$, unde fit $s=\sqrt{(ac-c^2)}$ et $x:y=\sqrt{c}:\sqrt{(a-c)}$ seu $y\sqrt{c}=x\sqrt{(a-c)}$, quae aequatio omnes dat chordas in hoc semicirculo ex A ductas, quemadmodum jam demonstravimus tempora per singulas chordas esse inter se aequalia. Valeat signum $-$ erit $\frac{4dQ}{Q} = \frac{-adr}{ar-r^2}$, atque hinc $Q^{-4} = \frac{cr}{a-r}$, se $\frac{r}{a-r} = \frac{c^4}{Q^4}$. Erit ergo $Q = CV\sqrt{\frac{a-r}{r}}$, atque ob $s=\sqrt{(ar-r^2)}$ habebitur $x = \frac{Cr}{B}\sqrt{\frac{a-r}{r}}$ et $y = \frac{C}{B}\sqrt{r(a-r)^3}$; eliminata ergo r prodibit ista aequatio (posito $\frac{C}{B}=m$) $y^2+x^2=maVxy$. Hae ergo curvae hanc habent proprietatem, ut arcus earum a semicirculo abscissae absoluantur descendendo eodem tempore, eo scilicet tempore, quo singulae semicirculi chordae percurruntur.

Corollarium 7.

351. Huius autem curvae cuius aequatio est $y^2 + x^2 = m a \sqrt{x y}$ figura est AMFA; habet nimirum diametrum AF cum verticali AP angulum semirectum constituentem et in A nodum. At vero omnes hae curvae sunt inter se similes, et omnes ad omnes circulos accommodari possunt.

Tabula IX.
Fig. 5.

Corollarium 8.

352. Si ergo in hac curva sumatur quodcunque punctum M et per hoc et A circulus transiens concipiatur centrum habens in verticali AP, corpus arcum AM eodem tempore percurreret, quo diametrum circuli, seu quo chordam AM. Quare haec curva hanc habet proprietatem, ut quivis arcus AM a corpore ex A descendente absolvatur eodem tempore, quo subten-
sa AM.

Corollarium 9.

353. Hoc ergo casu quo $P^2 Q = V^2$ perinde est sive sit $Q = u$ sive secus; eadem enim prodit aequatio inter x et y . Vti tam ex exemplo hoc quam ex aequatione intelligitur.

Tabula IX.
Fig. 4.

Exemplum 2.

354. Manente $P^2 Q = V^2$, ut sit $\frac{dQ}{Q} = \frac{dr}{dr}$

$\frac{dr(1+qq)}{-r-sq+\sqrt{\frac{gbr}{4}(1+qq)-(s-rq)^2}}$, fit curua BSC cir-
 culus centro A radio AB=a descriptus, erit $s = \sqrt{a^2-r^2}$ et $q = \frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}$ atque $1+qq = \frac{a^2}{a^2-r^2}$.
 Quibus substitutis prodibit sequens aequatio, $\frac{dr}{\sqrt{\frac{gbr}{4}-a^2}(a^2-r^2)} + a \frac{dr}{\sqrt{\frac{gbr}{4}-a^2}(a^2-r^2)}$ vbi $g b$ maius esse debet quam
 $4a$, quia r non excedere potest a . Hinc statim
 ille radius innotescit, qui quaesito satisfacit, po-
 nendo $\frac{gbr}{4} = a^2$ seu $r = \frac{4a^2}{gb}$, quo casu erit $s = \frac{a\sqrt{g^2b^2-16a^2}}{gb}$. Vnde erit $x:y = 4a:\sqrt{g^2b^2-16a^2}$
 et $\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{g^2b^2-16a^2}}{4}$ quae est tangens anguli illius
 radii, super quo corpus dato tempore \sqrt{b} ad pe-
 ripheriam peruenit, cum verticali AB. Curuae
 praeterea algebraicae non dantur, quia formula
 differentialis non effici potest rationalis.

Exemplum 3.

355. Sumta aequatione generalissima ex §.
 (347.) et ponatur linea BSC recta horizontalis
 fiet $r=a$ et $dr=0$. Hanc ob rem loco dr in-
 troducatur eius valor $\frac{ds}{q}$, vbi q erit infinite ma-
 gnum. Deletis ergo terminis, qui prae q eua-
 nescunt, proueniet ista aequatio: $ABRds+ABW$
 $sdu = \pm Ddu\sqrt{(gBabP^2Q-A^2a^2V^2)}$. Quae
 aequatio ob $Wdu=dR$ et P, Q , et V data per
 u integrationem admittit. Erit nempe $\frac{ABRs}{D} =$
 $C \pm$

$C \pm \int du V (gBabP^2 Q - A^2 a^2 V^2)$. Ex qua aequatione ergo invenitur s . Deinde cum sit $y = \frac{R^s}{D}$, at y euanescere debeat facto $u=0$, debet esse $C=0$, si quidem integrale $\int du V (gBabP^2 Q - A^2 a^2 V^2)$ ita sumatur ut euanescat posito $u=0$. Tum ergo erit $x = \frac{Qa}{B}$ et $y = \frac{\pm 1}{AB} \int du V (gBabP^2 Q - A^2 a^2 V^2)$. Quae est aequatio generalis pro omnibus curuis super quibus corpus ex A ad horizontalem datam descendit.

Exemplum 4.

356. Teneatur aequatio generalissima supra inventa (347), et ponatur linea BSC recta verticalis parallela ipsi AB et ad distantiam f ab ea posita erit $s=f$ et $q=0$. Quare habebitur ista aequatio $ADQdr + ADrdQ = \pm du V (gBD^2 bP^2 Qr - A^2 B^2 f^2 W^2)$. Cum autem sit $Qr=Bx$ hoc substituto prodibit $ADdx = \pm du V (gD^2 bP^2 x - A^2 f^2 W^2)$, unde invento x erit $y = \frac{fR}{D}$. At quia in illa aequatione indeterminatae x et u non sunt a se inuicem separatae, non multum ex ea deriuare licet.

Scholion 3.

357. Ex generali huius problematis solutione, quando vnica curua AND infinitas dat curuas AMC , colligere licet solutionem huius problematis, quo infinitae requiruntur curuae, super

Tom. II. Y qui-

quibus omnibus corpus ex A ad datum punctum peruenit. Quaelibet enim curua AND vnā dabit curuam per datum punctum curuae BSC trans-euntem; hocque modo innumerabiles huiusmodi curuae obtinebuntur. Sed cum hoc modo solutio nimis esset difficilis et operosa, aliam genuinam magis afferre conuenit. Modus autem, quo utemur ita est comparatus, vt vnā curuam jam nosse oporteat, ex qua innumerabiles deducere docebimus. Haec ergo curua quae nota esse debet, ex alterutra traditarum methodo eliciatur vt ex §. 350, vbi curua per quodvis punctum semicirculi transiens inveniri potest dato tempore describenda.

PROPOSITIO 39.

Problema.

Tabula X.
Fig. 1.

358. *Sollicitetur corpus perpetuo deorsum vi vni-formi g, dataque sit curua AMC super qua corpus ex A ad punctum datum C peruenit, inuenire omnes curuas ANC super quibus corpus eodem tempore ad punctum C ex A descendit.*

Solutio.

Sumta verticali AB pro axe omnium curuarum sit curuae datae AMC abscissa $AP = t$, applicata $PM = u$; sitque curua ANC vna quaesitarum; capiatur in ea arcus AN, qui eodem tempore
absol.

absoluatur, quo arcus AM, jungantur puncta M et N recta MN, et construatur curua ALB talis, vt applicata PL aequalis sit rectae MN. Haec ergo curua ALB occurret axi AB in punctis A et B; nam incidente puncto M in A, punctum N quoque in A incidet, et posito M in C punctum N quoque erit in C, quia arcus AMC et ANC eodem tempore percurri ponuntur. Intelligitur autem ex curua ALB inveniri posse curvam ANC; quare si infinitae huiusmodi curvae ALB concipiantur, in A et B incidentes in AB, earum quaeque dabit curuam ANC, hocque modo innumerabiles prodibunt curvae ANC quaesito satisficientes. Sit nunc $PL=r$, erit r functio quaedam ipsius $AP=t$; curuae autem ANC ponatur abscissa $AQ=x$, et $QN=y$. His positis erit $MN=\sqrt{((x-t)^2+(u-y)^2)}=r$, ideoque $y=u \pm \sqrt{(r^2-(x-t)^2)}$. Porro quia tempus per AM aequale ponitur tempori per AN, erit $\int \frac{\sqrt{(dx^2+du^2)}}{\sqrt{g}t} = \int \frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{\sqrt{g}x}$ seu $x dt^2 + x du^2 = t dx^2 + t dy^2$. Est autem $dy = du \pm \frac{(rdr - xdx + tdx + xdt - tdt)}{\sqrt{(r^2 - (x-t)^2)}}$. Sit $du = p dt$ et $dr = q dt$, erunt r, p , et q functiones ipsius t : ponatur porro breuitatis gratia $x-t=z$ seu $x=t+z$, erit $dy = p dt \pm \frac{qrdt + zdz}{\sqrt{(r^2 - z^2)}}$, et $dy^2 + dx^2 = p^2 dt^2 + dt^2 + 2 dt dz + dz^2 \pm \frac{2pqrdt^2 + 2pzdtdz}{\sqrt{(r^2 - z^2)}} + \frac{q^2 r^2 dt^2 - 2q r z dt dz + z^2 dz^2}{r^2 - z^2}$. Hinc obtinetur ista aequatio $\frac{tr^2 dz^2}{r^2 - z^2} - \frac{2tqrz dt dz - tq^2 r^2 dt^2}{r^2 - z^2} + \frac{2pzdtdz + 2pqtrdt^2}{\sqrt{(r^2 - z^2)}} - 2 t dt dz + z dt^2 + zp^2 dt^2$ ex qua

z ex t determinetur, habebitur aequatio inter x et y . Quo autem appareat cuiusmodi functio ipsius t loco r debeat accipi, vt r euanescat, tam posito $t=0$ quam $t=AB=a$, sit P functio quaecunque ipsius t euanesceat posito $t=0$, et Q sit etiam talis functio euanesceat posito $t=0$, abeat vero Q in A si fiat $t=a$; poterit ergo poni $r=P(A-Q)$. Hocque valore substituto quicquid loco P et Q substituatur, habebitur aequatio pro curuis quaesitis. Q. E. I.

Scholion I.

359. Ex hac quidem aequatione maxime intricata parum concludi potest ad propositum, etiamsi haec methodus genuina esse videatur. Saepe autem aequatio inuenta ad absurdum deducere debet, vt si curua data AMC fuerit linea breuissimi descensus, quo casu non dari potest alia curua, super qua descensus fiat eodem tempore. Ad nostrum ergo institutum conueniens videtur de lineis celerrimi descensus tractare, eaque problemata resolvere, in quibus inter omnes curuas vel eiusdem longitudinis vel aliam proprietatem communem habentes ea quaeritur, quae minimo tempore absoluantur. Atque etiam quemadmodum inter omnes lineas, super quibus descensus fit eodem tempore, ea sit inuenienda, quae data quapiam proprietate sit praedita. Etiam si enim difficillimum sit omnes lineas idem descen-

descensus tempus habentes exhibere, tamen ex iis quaelibet potest inueniri ex proprietate, quam prae reliquis omnibus possidet. Requiritur autem ad hanc rem pertractandam methodus isoperimetricorum, quam vt passim expositam hic non explicabimus.

Scholion 2.

360. Huius autem problematis solutio per Tabula IX.
Fig. 4.
(348) sequenti modo habetur: erat ibi $\frac{du}{u} =$

$$\frac{dr(1+qq)}{-r-sq \pm \sqrt{\left(\frac{gbr}{4}(1+qq)-(s-rq)^2\right)}} \quad \text{Sit punctum C}$$

ad quod omnes curuae conuenire debent, ponaturque $AE=f$ et $EC=b$, si ergo fit $r=f$, fieri debet $s=b$. Ad hoc fit S functio quaecunque ipsius r , quae abeat in F posito $r=f$, quo facto ponatur $s=\frac{sb}{f}$. Substituatur hic valor in superiore aequatione, eaque ita integretur vt posito $u=a$ fiat $r=f$. Deinde ex ea aequatione prodibit aequatio inter coordinatas curuae quaesitae AMC nempe $AP=x$ et $PM=y$, ex eo quod est $x=\frac{ur}{a}$ et $y=\frac{us}{a}$. Atque arbitrarius valor ipsius S dabit infinitas curuas AMC puncta A et C jungentes, et super quibus corpus descendens tempore dato $=\sqrt{b}$ perueniet ex A ad C . Sit autem $dS=Tdr$, erit $q=\frac{bT}{f}$, atque $\frac{du}{u} =$

$$\frac{dr(F^2+b^2T^2)}{-F^2r-b^2ST \pm \sqrt{\left(\frac{gF^2br}{4}(F^2+b^2T^2)-(FbS-FbTr)^2\right)}} \quad \text{feu}$$

Y 3

$\frac{du}{u} =$

$$\frac{du}{u} = \frac{dr(F^2 + b^2 T^2)}{-F^2 r - b^2 S T + F V \left(\frac{g b r}{u} (F^2 + b^2 T^2) - (b S - b T r)^2 \right)}$$

Quae aequatio ita integretur, vt posito $u=a$ fiat $r=f$; quo facto ponatur $x=\frac{ur}{a}$ et $y=\frac{bSu}{Fa}$, atque habebitur aequatio inter x et y pro infinitis cur-
 AMC quaesito satisfaciendibus.

PROPOSITIO 40.

Problema.

Tabula X.
 Fig. 2.

361. Inuenire legem generalem, secundum quam curua disposita esse debet, ut corpus super ea descen-
 dens citissime perueniat ad quoduis curuae punctum.

Solutio.

Sit AMC curua huiusmodi, super qua cor-
 pus ex A ad C tempore breuiore perueniat,
 quam super quavis alia curua per puncta A et C
 transeunte. Sumtis ergo in ea duobus quibusque
 M et μ , curua inter ea intercepta ita debet esse
 comparata, vt corpus in motu suo per AMC,
 arcum inter M et μ interceptum breuiore tem-
 pore absoluat quam quemuis alium, si esset in-
 terceptus. Sint nunc puncta M et μ proxima
 iuncta duobus elementis $Mm\mu$, et debebit tem-
 pus per $Mm\mu$ esse minimum; seu per regulas
 methodi maximorum et minimorum aequali tem-
 pori per elementa proxima $Mn\mu$. Ducantur ad
 axem

axem AP applicatae MP, mp , $\mu\pi$, sumtisque elementis Pp, $p\pi$ inter se aequalibus, seu quoque $MG = mH$, et pm si opus est ad n producta, erit mn infinite paruum respectu elementorum Mm et $m\mu$. Debebit ergo esse $t. Mm + t. m\mu = t. Mn + t. n\mu$. Sit celeritas quam corpus in M habet, debita altitudini v , qua ergo tam elementum Mm , quam Mn percurrent. Celeritas autem quam in m habebit debita sit altitudini $v + du$, et celeritas, quam in n habebit debita sit altitudini $v + du + ddw$; illa autem celeritate percurrent elementum $m\mu$, hac vero elementum $n\mu$. Hinc ergo habebitur ista aequatio, $\frac{Mm}{\sqrt{v}} + \frac{m\mu}{\sqrt{v+du}} = \frac{Mn}{\sqrt{v}} + \frac{n\mu}{\sqrt{v+du+ddw}}$, est vero $\frac{1}{\sqrt{v+du+ddw}} = \frac{1}{\sqrt{v+du}} - \frac{ddw}{2(v+du)\sqrt{v+du}}$, vnde ductis centris M et μ arculis mg et nb , erit $\frac{ng}{\sqrt{v}} = \frac{mb}{\sqrt{v+du}} + \frac{n\mu ddw}{2(v+du)\sqrt{v+du}}$. Porro quia est $\frac{1}{\sqrt{v+du}} = \frac{1}{\sqrt{v}} - \frac{du}{2v\sqrt{v}}$ et $\frac{1}{(v+du)\sqrt{v+du}} = \frac{1}{v\sqrt{v}} - \frac{3du}{2v^2\sqrt{v}}$. Quibus, neglectis negligendis, substitutis oritur $2v(mb - ng) = mb.du - n\mu.ddw = mb.du - Mm.ddw$. Est vero propter triangula similia nmg , mMG et nmb , μmH ut sequitur $ng : mn = mG : mM$, seu $ng = \frac{mG.mn}{Mm}$ et $mb : mn = \mu H : m\mu$, seu $mb = \frac{\mu H.mn}{m\mu}$. Quamobrem erit $2v(\frac{mH}{m\mu} - \frac{mG}{Mm}) = \frac{mG.du}{Mm} - \frac{Mm.ddw}{mn} = 2v \text{ diff. } \frac{mG}{Mm}$. Quae aequatio est homogenea et determinat naturam curvae AMC brachystochronae vocatae

catae, super qua corpus tempore breuissimo ex A ad C peruenit. Q. E. I.

Corollarium I.

362. Si ergo dicatur $MG = mH = dx$, $mG = dy$, et $Mm = V(dx^2 + dy^2) = ds$; erit $H\mu = dy + ddy$ et $m\mu = ds + dds$. His substitutis habebitur $2v d\frac{dy}{ds} = \frac{dydu}{ds} - \frac{dsddw}{mn}$. In qua si ex potentiis sollicitantibus determinentur v , du , et ddw , habebitur aequatio pro curua brachystochrona. At semper ddw ita inuoluet mn , vt mn ex calculo excedat.

Corollarium 2.

363. Sit radius osculi curuae $Mm\mu = r$ isque in plagam auersam ab axe AP directus erit $r = \frac{ds^3}{dx ddy}$, at est $d\frac{dy}{ds} = \frac{dsddy - dydds}{ds^2} = \frac{dx^2 ddy}{ds^3}$. Quare erit $d\frac{dy}{ds} = \frac{dx}{r}$, hinc prodibit ista aequatio $\frac{2vdx}{r} = \frac{dydu}{ds} - \frac{dsddw}{mn}$. Ubi notandum est esse $\frac{2v}{r}$ vim centrifugam, qua curua in M secundum normalem ad curuam premitur.

Corollarium 3.

364. Si ex potentiis sollicitantibus fluat $d\psi = Pdx + Qdy + Rds$; erit $du = Pdx + Qdy + Rds$ et $ddw = Q.mn + R.ng$, quia puncto m in n translato crescit dy particula mn et ds particula

la *ng*. Quia autem est $ng = \frac{dy \cdot mn}{ds}$, erit $\frac{ddw}{mn} = -Q - \frac{Rdy}{ds}$, quibus substitutis habebitur ista aequatio $\frac{2v}{r} = \frac{Pdy - Qdx}{ds}$.

Scholion I.

365. Ex solutione intelligitur formulam inventam latissime patere, atque ad potentias sollicitantes quascunque extendi, etiam resistentia non excepta. Quaecunque enim fuerint potentiae sollicitantes, determinari potest tam *du* quam *ddw*, qui valores substituti dabunt aequationem pro brachystochrona quaesita. Attamen haec tantum locum habent, si potentiarum directiones sint in eodem plano: curua enim inuenta est in eodem plano sita. Nihilo tamen minus si potentiae non fuerint in eodem plano, curua brachystochrona in dato plano ope formulae huius poterit inueniri. In quolibet enim plano dato peculiaris erit curua brachystochrona quaecunque fuerint potentiae sollicitantes. Alia vero quaestio est, si quaeratur linea brachystochrona inter omnes omnino lineas data duo puncta jungentes, etiam non in vno plano sitas. Quoties vero potentiarum sollicitantium directiones in eodem plano sunt positae, dubium non est lineam brachystochronam in eodem positam esse plano. Nam si curuae non essent in eodem plano potentiae oblique agerent, et propterea corpus non tantum, quantum fieri potest, accelerarent. Ex hac

Tom. II.

Z

igitur

igitur solutione tam linea absolute brachystochrona, si potentiarum sollicitantium directiones sunt in eodem plano, inuenitur, quam linea, quae in dato plano est brachystochrona, quaecunque fuerint potentiae sollicitantes.

Scholion 2.

366. Quaestionem hanc de linea brachystochrona seu celerrimi descensus primus produxit Cel. Ioh. Bernoulli, atque plures eius solutiones extant tam in Aët. Lips. quam Transactionibus Angl. et Comm. Acad. Paris. et alibi ubi hoc problema tam in hypothese potentiae sollicitantis deorsum directae, quam pro viribus centripetis solutum dederunt. Nemo autem problema fundamentale, quale hic dedimus, tam late patens praemisit, ut ad potentias quascunque et resistantiam etiam extendi posset. Sumserunt enim omnes $ddw=0$, quod semper perperam fit, nisi directio potentiae sit MG vel mH . Et hanc ob rem Cel. Hermannus cespitavit, dum tali propositione ad brachystochronas in medio resistente inueniendas est usus in Comm. Acad. Petrop. A. 1727; quasque correctas dedi in iisdem Comm. A. 1734. ex hoc ipso problemate.

PROPOSITIO 41.

Problema.

Tabula X.
Fig. 2.

367. Si corpus perpetuo deorsum trabatur vi
qua

quacunque; inuenire lineam brachystochronam AMC super qua corpus citissime ex A ad C descendit.

Solutio.

Posita $AP=x$; $PM=y$; et arcu $AM=s$, sit vis quae corpus in M deorsum vrget $=P$; erit $v=\int Pdx$ hoc integrali ita accepto vt euanescat posito $x=0$, si quidem corpus motum in A ex quiete inchoare ponitur: atque $dv=Pdx$. Erit ergo $du=Pdx= dv$ et $ddw=0$, quia dx inuariatum manet, eunte m in n . Quocirca habebitur ista aequatio $2v. d. \frac{dy}{ds} = \frac{dy dv}{ds}$, cuius integralis est $l \frac{v}{a} = 2 l \frac{dy}{ds}$ seu $v ds^2 = a dy^2$, hincque $dx^2 \int Pdx = aay^2 - dy^2 \int Pdx$. Quamobrem pro linea brachystochrona quaesita habebitur ista aequatio $dy = \frac{dx \sqrt{\int Pdx}}{\sqrt{a - \int Pdx}}$, in qua indeterminatae x et y sunt a se inuicem separatae. Curuae autem longitudo habetur ex hac aequatione $ds = \frac{dx \sqrt{a}}{\sqrt{a - \int Pdx}}$. Q.E.I.

Corollarium I.

368. In A igitur vbi celeritas corporis euanescit seu fit $\int Pdx=0$, erit $dy=0$ seu tangens curuae in A erit verticalis incidens in AP. At vbi fit $\int Pdx=a$, ibi tangens curuae erit horizontalis.

Corollarium 2.

369. Quia $ddw=0$, et $du=Pdx$, erit $\frac{2v}{r} = \frac{Pdy}{ds}$. (363) Est vero $\frac{Pdy}{ds}$ vis normalis, qua cur-
Z 2
v2

va in M secundum normalem versus axem AP ductam premitur. Consequenter vis normalis est aequalis vi centrifugae et in eandem plagam tendens. Quocirca linea brachystochrona hanc habet proprietatem, vt tota pressio, qua curua premitur, sit duplo maior quamvis normalis sola. In sequentibus vero demonstrabimus hanc proprietatem in omnibus lineis brachystochronis sive in vacuo siue in medio resistente locum habere.

Corollarium 3.

370. Propter arbitrariam a dantur infinitae curuae brachystochronae omnes in A initium habentes. Atque hac litera a effici potest, vt curua ex A per datum punctum C transeat, quae erit linea inter A et C, super qua tempus est minimum.

Corollarium 4.

Tabula X. Fig. 3. 371. Quia curua AMC alicubi habet tangentem horizontalem, sit ea BC et in C sumatur alius axis verticalis CQ. Sit $CQ = X$, $QM = Y$ et $CM = S$, erit $dX = -dx$, $dY = -dy$ et $dS = -ds$; atque $\int P dx = a - \int P dX$ integrali $\int P dX$ ita accepto vt evanescat posito $X = 0$. Ad hunc ergo axem CQ si curua referatur, habebitur ista aequatio $dY = \frac{dX \sqrt{(a - \int P dX)}}{\sqrt{P dX}}$ seu $dS = \frac{dX \sqrt{a}}{\sqrt{\int P dX}}$.

Corollarium 5.

372. Hae ergo omnes curuae ad vtramque partem axis CQ duos arcus habent similes et aequales.

les. Simili modo ad vtramque partem axis AB curua aequaliter est disposita. Quamobrem huiusmodi curuae infinitas diametros habebunt inter se parallelas, et ad distantiam BC positas; nisi forte potentia sollicitans ita accipiatur, vt supra A sit negatiua, quo casu curua CMA sursum tendere poterit et partem concavam deorsum convertere.

Exemplum I.

373. Sit potentia sollicitans vniformis seu $P = g$, erit $\int P dx = gx$; vnde loco a posito gb pro brachystochrona in hac potentiae sollicitantis hypothesisi habebitur ista aequatio $dy = \frac{dx \sqrt{x}}{\sqrt{(b-x)}}$ seu $ds = \frac{dx \sqrt{b}}{\sqrt{(b-x)}}$. At si aequatio ad axem CQ referatur erit $dY = \frac{dX \sqrt{(b-X)}}{\sqrt{X}}$ et $dS = \frac{dX \sqrt{b}}{\sqrt{X}}$ cuius integralis est $S = 2\sqrt{bX}$. Ex qua aequatione patet curuam esse cycloidem super basi horizontali a circulo diametri b descriptam et deorsum conuersam: quemadmodum hoc a Cel. Ioh. Bernoulli aliisque eximiis Geometris jam pridem est inuentum. Si itaque dentur duo quaecunque puncta A et M, linea super qua corpus ex A citissime ad M descendit, inuenitur si describatur cyclois cuspidem in A, et basem horizontalem habens, atque per punctum M transiens; id quod ex eo, quod omnes cycloides sunt curuae similes, ex vnica descripta cycloide facile efficitur. Tempus autem, quo corpus ex A ad M pertingit, quodque est minimum, erit $= \int \frac{dx \sqrt{b}}{\sqrt{g(bx-x^2)}}$

et curvae AM longitudo erit $= \int \frac{dx\sqrt{b}}{\sqrt{(b-x)}} = 2b - 2\sqrt{b(b-x)}$. Cum autem sit $PM = y = \int \frac{xdx}{\sqrt{(bx-xx)}}$; erit tempus per AM $= \frac{2y + 2\sqrt{(bx-xx)}}{\sqrt{gb}} =$ arcui in circulo diametri b cuius sinus versus est $= x$ ducto in $\frac{2}{\sqrt{gb}}$.

Exemplum 2.

374. Si potentia sollicitans P fuerit vt potestas quaecunque abscissae CQ, nempe $P = \frac{X^n}{f^n}$

erit $\int PdX = \frac{X^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Consequenter curua brachystochrona AMC exprimetur hac aequatione $dY = \frac{dX \sqrt{(n+1)af^n - X^{n+1}}}{X^{\frac{n+1}{2}}}$ seu $dS =$

$$\frac{dX \sqrt{(n+1)af^n}}{X^{\frac{n+1}{2}}}, \text{ ita vt fit } S = \frac{2X^{\frac{1-n}{2}}}{1-n} \sqrt{(n+1)af^n}$$

Quare si fuerit vel $n=1$ vel $n>1$ curua CM erit infinite magna, seu ipsa recta BC. Cuspis autem curvae A seu locus in quo motus incipit habetur

sumendo $CQ = BA = \sqrt[n+1]{(n+1)af^n}$. Curvae pro-

dibunt algebraicae si fuerit $n = \frac{1-2m}{1+2m}$ denotante m numerum integrum affirmatiuum quemcunque.

His igitur casibus erit n numerus negatiuus, vnitatem minor, ita tamen vt $n+1$ sit numerus affirmatiuus. Sit $m=1$, erit $n=-\frac{1}{3}$. Quare fiet dY

$$= \frac{dX}{X^{\frac{4}{3}}}$$

$$= \frac{dX}{X^{\frac{1}{3}}} \sqrt{\left(\frac{2}{3}af^{-\frac{1}{3}} - X^{\frac{2}{3}}\right)}, \text{ cuius integralis est } Y =$$

$\frac{2a\sqrt{2a}}{3\sqrt{3}f} - \left(\frac{2}{3}af^{-\frac{1}{3}} - X^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$ Quae aequatio ab irrationalitate liberata fit ordinis sexti. Simili modo aliae curvae algebraicae inuenientur, quae in certis hypothesibus sunt brachystochronae.

Scholion I.

375. Ex data problematis solutione sequitur simul solutio problematis inuersi, quo quaeritur potentia sollicitans deorsum directa, talis vt data curua fit brachystochrona. Debet autem haec curua in puncto infimo C habere tangentem horizontalem, et alicubi in A vbi est motus initium, tangentem verticalem. Vt si fuerit aequatio pro curua data haec $dY = R dX$, erit $R^2 \int P dX = a - \int P dX$ atque $\int P dX = \frac{a}{R^2 + 1}$. Vnde inuenitur $P = \frac{-2aRdR}{(R^2 + 1)^2 dX} = \frac{-2adXdYddY}{ds^4}$. Si ergo radius osculi in M ponatur r , propter $r = \frac{ds^3}{dXdY}$ habebitur $P = \frac{2adY}{rds}$. Quare problema hac vnica soluetur analogia: vt radius osculi curuae in M ad lineam datam; ita sinus anguli, quem tangens curuae in M cum verticali facit, ad potentiam sollicitantem, quae quaeritur. Altitudo vero debita celeritati, quam corpus in M habet, est $a - \int P dX = \frac{aR^2}{R^2 + 1} = \frac{adY^2}{ds^2}$, ex quo sequitur celeritatem corporis esse illi ipsi sinui anguli, quem tangens curuae cum
vertic

verticali constituit, proportionalem. Vt si fit curva CMA circulus radio c descriptus; erit $r = c$ et $dY = \frac{cdx - xdx}{\sqrt{(2cx - xx)}}$ atque $dS = \frac{cdx}{\sqrt{(2cx - xx)}}$, ex quibus fit $P = \frac{2a(c-x)}{c^2} = \frac{2a \cdot AP}{cc}$. Vis ergo corpus deorsum trahens proportionalis esse debet abscissae AP, cui etiam celeritas est proportionalis.

Scholion 2.

376. Inuenta linea brachystochrona pro hypothefi potentiae sollicitantis deorsum tendentis, ordo requireret, vt lineas brachystochronas in hypothefi virium centripetarum determinaremus.

Tabula X. At propositio fundamentalis (361.) ita est comparata, vt elementa curuae Mm et $m\mu$ ad axem AP et ordinatas orthogonales MP, mp referantur, quod ad casum virium centripetarum non commode quadrat. Videtur quidem elementa MG et mH vt conuergentia ad centrum virium considerari posse; sed hic ipse error, qui ex hoc oritur, quod elementa MG et mH non essent parallela, vt propositio fundamentalis requirit, perperam negligitur. Perspicuum hoc reddi potest determinando radio osculi, qui si MG et mH fuerint inter se parallela est $= MG : d. \frac{mG}{Mm}$, quae autem expressio non locum habet, si MG et mH ad centrum virium convergunt. Quare antequam ad brachystochronas in hypothefi virium centripetarum accedamus, ex propositione fundamentali

tali

tali generalem deriuabimus proprietatem cuiunque potentiarum sollicitantium hypothesi accommodatam. Ex quibus perspicietur Cel. Hermannum in Phoronomia aliosque, qui brachystochronas pro viribus centripetis dederunt, esse deceptos, dum vsi sunt principio cum veritate non consentaneo, vt mox indicabitur.

PROPOSITIO 42.

Theorema.

377. *Quaecunque fuerint potentiae sollicitantes, ea linea erit brachystochrona, quam corpus super ea motum premit vi duplo maiore, quam est vel sola vis centrifuga, vel sola vis normalis.* Tabula X.
Fig. 2.

Demonstratio.

Quaecunque et quotcunque fuerint potentiae sollicitantes, eae omnes in binas resolui possunt, quarum altera trahat secundum MG altera secundum MP. Sit illa secundum MG trahens = P et quae secundum MP trahit = Q, et dicantur AP = x, PM = y, et AM = s; itemque altitudo celeritati in M debita = v. Erit ex his duabus viribus vis tangentialis = $\frac{Pdx - Qdy}{ds}$, et vis normalis = $\frac{Pdy + Qdx}{ds}$. Hanc ob rem erit $dv = Pdx - Qdy$. Cum hac expressione comparetur, quod supra (364.) est allatum, vbi posuimus $dv = Pdx +$
Tom. II. Aa Qdy

$Qdy + Rds$, erit Q negativum et $R=0$. Sequitur ergo exinde fore $\frac{2v}{r} = \frac{Pdy + Qdx}{ds}$. At est $\frac{2v}{r}$ vis centrifuga, qua curva in M premitur et $\frac{Pdy + Qdx}{ds}$ est vis normalis. Quare cum vis centrifuga sit aequalis vi normali, tota pressio, quam curva sustinet duplo maior est quam vel sola vis centrifuga, vel sola vis normalis. Q. E. I.

Scholion I.

378. In sequente capite demonstrabimus hanc eandem propositionem locum etiam habere in medio quocunque resistente; id quod quidem eadem opera hic demonstrare potuissimus: sed quia resistantiae sequens caput est destinatum, eo potius hoc theorema transferre visum est.

Corollarium I.

379. Ex hac igitur propositione facile erit in quacunque potentiarum sollicitantium hypothesi brachystochronas determinare. Hocque ipsum jam ex aliqua parte supra praestitimus, ubi curvas determinauimus, in quibus pressio totalis datam habeat rationem ad vim centrifugam.

Corollarium 2.

380. Cum sit $dv = Pdx - Qdy$, erit $v = \int Pdx - \int Qdy$ his integralibus ita accipiendis, ut evanescant

nescant factis x et $y = 0$, si quidem motus in A ex quiete incipere debet.

Corollarium 3.

381. Si ergo hic pro v inuentus valor substituitur habebitur aequatio pro curua brachystochrona haec $\frac{2 \int P dx - 2 \int Q dy}{r} = \frac{P dy + Q dx}{ds}$. Est vero $r = \frac{ds^2}{dx dy}$ (363.) sumto dx pro constante, quia in partem oppositam axi AP cadere r ponitur; unde habetur haec aequatio: $\frac{2 dx dy}{ds^2} (\int P dx - \int Q dy) = P dy + Q dx$.

Corollarium 4.

382. Quia haec aequatio est differentialis secundi gradus atque ideo duplicem integrationem requirit, altera integratione constans quaevis poterit adici, altera effici debet, vt facto $x = 0$ fiat quoque $y = 0$. Infinitae ergo prodeunt curuae brachystochronae pro eadem potentiarum sollicitantium hypothese. Atque constante arbitraria effici poterit, vt curua per datum punctum transcat.

Corollarium 5.

383. Tempus, quo corpus ex A ad M peruenit, est $= \int \frac{ds}{\sqrt{(\int P dx - \int Q dy)}} = \int \sqrt{\frac{2 dx dy}{P dy + Q dx}}$, quae quidem expressio prius ex aequatione curuae est in-

A a 2 vesti-

vestiganda; minimum vero hoc tempus esse debet inter omnia alia tempora motuum per curvas omnes puncta A et M jungentes.

Scholion 2.

384. Quemadmodum porro in quacunque potentiarum sollicitantium hypothefi eae curvae libere describuntur, in quibus vis centrifuga aequalis est et contraria vi normali; ita eae curvae erunt brachystochronae, in quibus vis normalis quoque aequalis est vi centrifugae, sed in eandem plagam tendens. Atque quemadmodum illa proprietas communis est omnium curvarum libere descriptarum etiam in medio resistente, ita haec quoque proprietas ad omnes lineas brachystochronas in medio resistente extenditur.

PROPOSITIO 43.

Problema.

Tabula X.
Fig. 4.

385. Si corpus vi quacunque perpetuo trahatur ad centrum virium C: inuenire lineam brachystochronam AM, super qua corpus ex A citissime ad M pertingat.

Solutio.

A puncto A, in quo motus initium ponitur, ad centrum virium C ducatur recta AC, item
MC

MC, et in tangentem MT ex C perpendicularum CT. Ponantur $AC=a$; $CM=y$; $CT=p$; vis centripeta in $M=P$ et celeritas in M debita altitudini v . His positis erit $dv=-Pdy$ et $v=-\int Pdy$ hoc integrali ita accepto vt euanescat posito $y=a$. Vis normalis autem erit $=\frac{Pp}{y}$; cui aequalis esse debet vis centrifuga et in eandem plagam tendens; tum enim proueniet curua brachystochrona, vt Prop. praec. demonstrauius. Curua igitur debebit esse conuexa versus centrum C et radius osculi in partem auersam a centro C cadet. Quare cum haec expressio $\frac{ydy}{dp}$ exhibeat radium osculi, quatenus versus centrum cadit, erit vera radii osculi expressio in nostro casu $-\frac{ydy}{dp}$. Vis igitur centrifuga erit $=\frac{-2vd}{ydy}p=\frac{2dp\int Pdy}{ydy}$, cui aequalis poni debet vis normalis $\frac{Pp}{y}$; ex quo oritur haec aequatio $\frac{2dp}{p}=\frac{Pdy}{\int Pdy}$ cuius integralis est $\frac{pp}{b}=-\int Pdy$, seu $p=\sqrt{-b\int Pdy}$; quae est aequatio pro curua quaesita inter y et p . At si centro C ducatur arcus MP hicque dicatur $\frac{ys}{a}$, erit $nm=\frac{yds}{a}$ et $pp==\frac{y^4ds^2}{a^2dy^2+y^2ds^2}$. Hinc fiet $ds=\frac{-apdy}{y\sqrt{(y^2-p^2)}}$, atque valore ipsius p ex superiore aequatione substituto habebitur $ds=\frac{-ady\sqrt{-b\int Pdy}}{y\sqrt{(y^2+b\int Pdy)}}$, quae est aequatio inter y et arcum circuli s radio a descriptum, qui metitur angulum ACM, ex qua fuit constructio curuae quaesitae. Q. E. I.

Corollarium I.

386. Quia altitudo celeritati debita est $v = -\int P dy = \frac{pp}{b}$; celeritas corporis in quovis loco erit vt perpendicularum ex C in tangentem demissum: simili modo, quo in motu libero celeritas est huic perpendicularo reciproce proportionalis.

Corollarium 2.

387. Sit radius osculi in M $= r$, erit $\frac{2v}{r} = \frac{pp}{y}$ ex conditione problematis. Hinc ergo habetur $r = \frac{2yv}{pp} = \frac{2py}{bP}$. Quia autem in initio curvae in A est $p=0$ seu AC tangens curvae, erit radius osculi quoque in A $= 0$, nisi forte simul P vis centripeta in A evanescat.

Corollarium 3.

388. Maximam corpus habebit celeritatem in loco vbi $dp=0$, ibi autem ex aequatione pro curua fit $dy=0$. Quare in eo loco corpus celerime mouetur vbi recta CM in curuam est normalis. Curua ergo ultra hoc punctum a centro C recedit.

Scholion I.

389. Celeritas ergo corporis in singulis brachystochronae punctis non est proportionalis sinui anguli, quem tangens curvae cum directione vis centripetae constituit; huius enim anguli TMC
sinus

sinus est $\frac{p}{y}$, celeritas vero ipsi p inuenta est proportionalis. Haec quidem proprietas locum habet, si centrum virium infinite distat et directiones vis sollicitantis sunt inter se parallelae, vt ex Prop. 41. intelligitur, vbi celeritas erat vt $\frac{dy}{ds}$ i. e. vt sinus ang. quem elementum curuae cum directione potentiae sollicitantis constituit. Hanc autem proprietatem Cel. Hermannus in Comm. Acad. Petrop. A. 1727. omnibus brachystochronis tam in vacuo, quam in medio resistente communem esse est arbitratus. Atque hanc ob rem non solum eae lineae, quas in medio resistente pro brachystochronis dedit, tales non sunt, sed etiam quas in vacuo pro viribus centripetis inuenit. Hoc autem casu inuenit hanc aequationem $\frac{\int P dy}{b} = \frac{p^2}{y^2}$ a nostra atque vera aequatione prorsus discrepantem.

Exemplum I.

§90. Sit vis centripeta ipsis distantis corporis a centro proportionalis, fiet $P = \frac{y}{f}$. Quare erit $\int P dy = \frac{y^2 - a^2}{2f}$ atque $v = \frac{a^2 - y^2}{2f} = \frac{p^2}{b}$. Quae est aequatio pro brachystochrona in hac vis centripetae hypothesi, inter p et y . Altera vero aequatio inter arcum s radio a descriptum, qui est mensura anguli ACM, et y est haec $ds = \frac{-ady\sqrt{b(a^2 - y^2)}}{y\sqrt{(2fy^2 + by^2 - a^2b)}}$. Huius curuae punctum infimum seu centro proximum habetur ponendo vel $dy = 0$
vel

vel $p=y$, tum autem erit $y=\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{(b+2f)}}$, haec ergo est minima curvae a centro C distantia. Radius osculi huius curvae in quovis puncto est $=\frac{2py}{bP}=\sqrt{\frac{2f(a^2-y^2)}{b}}$. In puncto ergo centro proximo radius osculi est maximus quippe $=\frac{2af}{\sqrt{b(b+2f)}}$. Ponatur tangens anguli ACM $=t$ posito sinu toto $=1$, erit $\frac{ds}{a}=\frac{dt}{1+tt}$; ponatur porro $\frac{\sqrt{b(a^2-y^2)}}{\sqrt{(2fy^2+by^2-a^2b)}}$ $=q$, habebitur ista aequatio $\frac{dt}{1+tt}=\frac{dq}{1+qq}-\frac{dq}{1+(\frac{b+2f}{b})qq}$

Ex quo intelligitur curvam toties esse algebraicam quoties est $\frac{b}{b+2f}$ numerus quadratus. Longitudo curvae AM est porro generaliter $=\int \frac{-ydy}{\sqrt{(y^2+bfyPdy)}}$; hoc ergo casu erit $AM=\int \frac{-ydy\sqrt{2f}}{\sqrt{(2fy^2+by^2-a^2b)}}$ $=\frac{2af-\sqrt{2f(2fy^2+by^2-a^2b)}}{2f+b}$. Ex qua aequatione sequitur curvam brachystochronam AM esse hypocycloidem, quae generatur rotatione circuli cuius diameter est $=\frac{a\sqrt{(b+2f)}-a\sqrt{b}}{\sqrt{(b+2f)}}$ super concava parte peripheriae AE centro C radio AC descriptae. Cum igitur b pro lubitu accipere liceat, apparet omnes hypocycloides super peripheria AE natas esse brachystochronas.

Exemplum 2.

391. Sit vis centripeta reciproce proportionalis quadratis distantiarum, ut sit $P=\frac{f^2}{y^2}$, vnde erit $\int P dy = \frac{-f^2}{y} + \frac{f^2}{a} = \frac{f^2(y-a)}{ay}$, atque $v = \frac{f^2(a-y)}{ay} = \frac{p^2}{b}$.

$\frac{p^2}{b}$, quae est aequatio pro brachystochrona in hac vis centripetae hypothesi. Altera vero aequatio inter arcum s et y erit ista $ds = \frac{-a dy \sqrt{b f^2 (a-y)}}{y \sqrt{(a y^3 + b f^2 y - a b f^2)}}$. Huius ergo curvae punctum infimum posito $dy = 0$, determinabitur ope huius aequationis cubicae $a y^3 + b f^2 y = a b f^2$. Ceterum ista aequatio inter s et y sufficit ad curvam quaesitam construendam.

Scholion 2.

392. Ex his igitur, quae in hac et praecedentibus propositionibus allata sunt, intelligitur quomodo in quacunque potentiarum sollicitantium hypothesi ea linea sit inuenienda, super qua corpus ex dato puncto ad datum punctum citissime perueniat. Nunc ergo etiam determinari oportet eam lineam, super qua corpus a dato puncto citissime non ad datum punctum sed ad datam lineam perueniat, quae sane curua vna erit ex infinitis brachystochronis: at quaenam ea sit in sequente Propositione declarabimus.

PROPOSITIO 44.

Theorema.

393. Corpus a dato puncto A ad quamvis lineam datam BM celerrime peruenit super linea brachystochrona AM , quae datae lineae BM ad angulos rectos occurrit: hocque in quacunque potentiarum sollicitantium hypothesi.

Tabula X.
Fig. 5.

Tom. II.

Bb

De-

Demonstratio.

Sit AM ea linea, super qua corpus ex A citissime ad lineam BM perueniat; perspicuum est primo hanc lineam fore brachystochronam: nam si daretur linea, super qua corpus citius ab A ad M perueniret, ea potius quaesito satisfaceret. Praeterea haec linea AM ad angulos rectos in M curuae BM occurrit; nisi enim ad angulos rectos occurreret, ducta minima normali mn , ob $mn < mM$ corpus citius per Amn ad curuam BM perueniret, quam per AmM . Quare ne haec exceptio locum inuenire possit, necesse est, vt curua AM datae curuae normaliter insistas. Consequenter corpus super ea infinitarum brachystochronarum ex A ad curuam BM ductarum citissime ad curuam BM peruenit, quae curuae BM ad angulos rectos occurrit. Q. E. I.

Corollarium I.

394 Si ergo infinitae curuae quaerantur, super quibus corpus dato tempore ab A ad lineam BM perueniat; oportet vt datum tempus sit maius quam tempus per brachystochronam AM : alias enim problema fieret impossibile.

Coollarium 2.

395. Si accadat vt plures curuae brachystochronae sint normales in curuam BM , plura quoque

que prodibunt tempora minima vel maxima. Haec enim methodus tam minima quam maxima declarat.

Corollarium 3.

396. Quia tempus per curuam brachystochronam AM est minimum, intelligitur ex methodo maximorum et minimorum, si duae brachystochronae proximae concipiantur normaliter insistentes curvae BM , tempora per eas esse inter se aequalia.

Corollarium 4.

397. Hinc porro perspicitur, si curua BM fuerit eiusmodi, ut omnes brachystochronas ex puncto A ductas secet ad angulos rectos, tempora per omnes brachystochronas ad curuam B M usque ductas fore inter se aequalia.

Corollarium 5.

398. Quamobrem curua quae ab omnibus curuis brachystochronis ex puncto A ductis arcus isochronos, seu eodem tempore percurfos abscindit, ea quoque omnes brachystochronas ad angulos rectos secabit, seu erit illarum traectoria orthogonalis.

Corollarium 6.

399. Atque vicissim quoque perspicitur, si curua, quae ab infinitis curuis arcus isochronos

Bb 2

ab-

abscindit, fuerit earum trajectoria orthogonalis; eas infinitas curuas omnes esse brachystochronas.

Scholion.

400. Facile intelligitur hanc propositionem locum quoque habere in medio resistente; simili enim modo apparet tempus per elementum mn normale in curuam BM minus esse quam tempus per elementum mM quod non est perpendiculare; in hoc autem totius demonstrationis vis est sita. Quare si, infinitis curuis ex puncto A eductis, lex potentiarum sollicitantium et resistentiae poterit inueniri, in qua cae curuae omnes sint brachystochronae, simul harum curuarum trajectoria orthogonalis poterit exhiberi quaerendo tantum curuam ab iis curuis arcus isochronos abscindentem. Atque hanc ipsam trajectorias orthogonales inueniendi methodum jam adhibuit Cel. Ioh. Bernoulli, in Act. Lipf. A. 1697.

PROPOSITIO 45.

Problema.

Tabula X.
Fig. 6.

401. *Inter omnes curuas puncta A et C jungentes et aequaliter longas eam determinare AMC super qua corpus celerrime ex A ad C perueniat, in hypothese potentiae sollicitantis uniformis g et deorsum directae.*

So-

Solutio.

Ducta verticali AP et horizontali PM dica-
tur $AP=x$, $PM=y$ et $AM=s$; eritque tempus
quo arcus AM absoluitur $= \int \frac{ds}{\sqrt{gx}}$. Iam per metho-
dum isoperimetricorum, de qua peculiarem dedi
dissertationem cum formulis generalibus, ex qui-
bus quaevis problemata facile resolui possunt, in
Comment. Acad. Petr. A. 1733; duae quantita-
tes considerandae sunt arcus $AM=s=\int ds$ et tem-
pus per $AM=\int \frac{ds}{\sqrt{gx}}$, quarum altera alterius re-
spectu debet esse minima vel maxima. Eodem
enim redit siue inter omnes curuas aequae longas
quaeratur ea, quae breuissimum habeat descensum,
siue inter omnes, super quibus descensus fiunt
eodem tempore ea, quae est breuissima. Per for-
mulas autem meas dat $\int ds$, hanc quantitatem *diff.*
 $\frac{dy}{ds}$ et $\int \frac{ds}{\sqrt{gx}}$ dat *diff.* $\frac{dy}{ds\sqrt{gx}}$, quarum altera alterius mul-
tiplo cuicunque aequalis est ponenda. Habetur ergo
integrando $\frac{dy}{ds} = \frac{dy\sqrt{a}}{ds\sqrt{x}} - m$, seu $dy(\sqrt{a}-\sqrt{x}) =$
 $mds\sqrt{x}$. Sumendis vero quadratis erit $dy^2(\sqrt{a}-$
 $\sqrt{x})^2 = m^2x dx^2 + m^2x dy^2$, vnde erit $dy =$
 $\frac{mdx\sqrt{x}}{\sqrt{(a-2\sqrt{ax}+(1-m^2)x)}}$ et $ds = \frac{dx(\sqrt{a}-\sqrt{x})}{\sqrt{(a-2\sqrt{ax}+(1-m^2)x)}}$. Ex
quo curua quaesita determinabitur. Q. E. I.

Corollarium I.

402. In aequatione inuenta duae insunt quan-
titates a et m arbitrariae, quibus effici potest vt
curua per datum punctum C transeat, et vt simul sit

Bb 3

datae

datae longitudinis. Atque tum haec curua celerime absoluetur inter omnes alias curuas eiusdem longitudinis per A et C transeuntes.

Corollarium 2.

403. Si ponantur a et m infinite magna prodibit cyclois, quae non solum inter omnes curuas eiusdem longitudinis, sed inter omnes omnino citissime absoluitur.

Corollarium 3.

404. Si ponatur $m=0$ prodit $dy=0$; seu recta verticalis. At si fiat $a=0$, oritur recta quaecunque per punctum A ducta. Est enim recta linea inter omnes lineas, quae eodem tempore absoluntur minima seu breuissima.

Corollarium 4.

405. Si ponatur $m=1$, prodibit curua algebraica, erit enim $dy = \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(a-2\sqrt{ax})}}$, cuius integralis est $y = \frac{-(4a+4\sqrt{ax}+6x)\sqrt{(a-2\sqrt{ax})}}{15\sqrt{a}} + \frac{4a}{15}$. Haec curua etiam est rectificabilis, namque erit $s = \frac{2a}{5} - \frac{(2a+2\sqrt{ax}-2x)}{5\sqrt{a}} \sqrt{(a-2\sqrt{ax})}$. Quin etiam tempus per arcum AM algebraice poterit exprimi, erit enim $\int \frac{ds}{\sqrt{x}} = \frac{4\sqrt{a}}{3} - \frac{(4\sqrt{a}-2\sqrt{x})\sqrt{(a-2\sqrt{ax})}}{5\sqrt{a}}$. Aequatio vero pro curua reducta fit ordinis quinti.

Co.

Corollarium 5.

406. Si in hac curua fumatur $x = \frac{a}{4}$, ibi tangens erit horizontalis, atque recta verticalis in eo curuae puncto erit diameter curuae. Illo autem loco fit $y = \frac{4a}{15}$, et longitudo curuae ad hoc punctum erit $= \frac{2a}{5}$. Atque tempus, quo hic arcus absolvitur est $= \frac{4\sqrt{a}}{3\sqrt{g}}$. Eodem ergo tempore corpus recta descendet per altitudinem $\frac{4}{9}a$.

Scholion.

407. Missis nunc hisce de celerrimo descensu progredimur ad eas curvas considerandas, super quibus plures descensus inter se comparati datam teneant relationem. Huc maxime pertinet quaestio de curvis tautochronis, super quibus vel omnes descensus ad punctum infimum curvae vsque fiunt eodem tempore, vel integrae oscillationes. Ad haec deinde aliae accedere possunt quaestiones cum difficiles, tum vim methodi, qua vtemur, illustrantes.

PROPOSITIO 46.

Problema.

408. *Invenire legem generalem curvarum tautochronarum, super quibus omnes descensus ad punctum A, initio descensus ubicunque in curva AM accepto, absoluantur eodem tempore.*

Tabula XI.
Fig. 1.

So-

Solutio.

Sumta recta AP pro axe, dicatur curvae portio $AM=s$, sitque altitudo celeritati in A debita $=b$, et altitudo celeritati in M debita $=v$; erit tempus quo arcus AM absoluitur $=\int \frac{ds}{\sqrt{v}}$, quod integrale ita est capiendum, ut euanescat posito $s=0$. Tum si in eo integrali ponatur $v=0$, habebitur tempus descensus a loco in quo celeritas erat nulla usque ad punctum A, seu totum descensus tempus; id quod eadem quantitate expressum esse debet, quaecunque fuerit quantitas b . Haec igitur quantitas b neque in expressione temporis inesse debet, neque in expressione pro curva AM, quia haec eadem curva idem descensus tempus producere debet, utcunque varietur b . Sit jam v quantitas composita ex littera z ad curuam pertinente, et a curua AM cum abscissa AP et applicata PM tantum pendente, neque b inuolvente; atque ex littera b quae ex b et quantitativis constantibus sit composita. Sit autem v talis ipsarum b et z functio ut euanescat, posito $z=b$, atque ut fiat $=b$, si sit $z=ab$, existente a numero quocunque. Ponatur porro $ds=pdz$ pro aequatione curvae quaesitae, debeat p talis esse quantitas, in qua non contineatur b vel h , quia hae litterae in aequationem curvae ingredi nequeunt. Habebimus ergo pro expressione temporis per AM, $\int \frac{pdz}{\sqrt{v}}$ hoc integrali ita accepto ut euanescat posito $v=b$ seu $z=ab$. Deinde hoc integrale si in eo po-

ponatur $z=b$ dabit tempus totius descensus, in quo b inesse non poterit. Hoc vero euenit si $\int \frac{p dz}{\sqrt{v}}$ fuerit functio ipsarum b et z nullius dimensionis, seu si $\frac{p z}{\sqrt{v}}$ fuerit functio nullius dimensionis. Sit v functio m dimensionum ipsarum b et z , debet esse $p = C z^{\frac{m-2}{2}}$, denotante C quantitatem constantem a b non pendentem. Quoties ergo pro v talis functio fuerit comperta, habebitur pro curua quaesita haec aequatio $ds = C z^{\frac{m-2}{2}} dz$, seu $s = \frac{2C z^{\frac{m}{2}}}{m} + \text{const.}$ si opus est, quo s euanescat, si in z euanescat vel x vel y . Q. E. I.

Corollarium I.

409. Quo igitur haec methodus possit adhiberi, oportet vt v quantitatibus finitis sit expressum: atque vt ea expressio transmutari possit in functionem homogeneam ex b et z constantem.

Corollarium 2.

410. Hanc ob rem necesse est vt fiat $v=b$, si ponatur $z=\alpha b$; quo in quantitate constante adiecta etiam non reperiatur b . Sufficit igitur si viderimus fieri $v=b$, facto $z=\alpha b$ neque opus est, vt integratio absoluaetur.

Corollarium 3.

411. Intelligitur etiam curuam in A habere debere tangentem normalem in directionem vis

Tom. II.

Cc

folli

sollicitantis; nisi enim hoc fuerit, tempus per arcum descensus infinite paruum, foret quoque infinite paruum.

Scholion.

412. Valet haec solutio non solum si, vti figura indicat, curua exponatur per coordinatas orthogonales; nihil enim interest quibusnam quantitibus naturam curuae exponere velimus; dummodo in z non ingrediatur b . Potest autem z continere lineas et quantitates quascunque a curva pendentes. Hac igitur methodo in vacuo, in quacunque potentiarum sollicitantium hypothesi, lineae tautochronae poterunt inueniri, quia semper celeritas per quantitates finitas exprimi potest. At si, vt in mediis resistentibus fieri solet, celeritas non potest exhiberi finitis quantitibus; haec methodus vsum habere nequit; sed alia desideratur, quae succedit, etiam si celeritas per aequationem differentialem tantum detur.

PROPOSITIO 47.

Problema.

Tabula XI.
Fig. 1.

413. Si corpus deorsum sollicitetur vi quacunque; inuenire lineam tautochronam, super qua omnes descensus fiant eodem tempore.

Solutio.

Posito $AP=x$, $PM=y$; et $AM=s$, sit celeritas in A debita altitudini b ; et in M debita altitu-

titudini v . Sit porro vis follicitans in $M=P$, erit $v=b-\int P dx$ integrali $\int P dx$ ita accepto vt euanescat facto $x=0$. Iam si ponatur $b=b$ et $\int P dx = z$, erit v functio vnus dimensionis ipsarum b et z , et euanescit facto $z=b$, fitque $v=b$ facto $z=0$. Erit igitur $m=1$, ideoque habebitur pro curua quaesita ista aequatio $ds = \frac{Cdz}{\sqrt{z}}$ et $s = 2\sqrt{az} = 2\sqrt{a}\int P dx$. Si desideretur aequatio inter x et y , erit ob $ds = \frac{aP dx}{\sqrt{a}\int P dx}$, $dy = \frac{dx\sqrt{(aP^2 - \int P dx)}}{\sqrt{\int P dx}}$
Q. E. I.

Corollarium I.

414. Quia euanescit $\int P dx$ facto $x=0$; tangens curuae in A erit horizontalis, nisi in A euanescat P. Atque curua alicubi habebit tangentem verticalem, ibique plerumque cuspidem, hoc euenit vbi erit $\int P dx = aP^2$. Ibi enim fit $dy=0$.

Corollarium 2.

415. Huius curuae in puncto infimo A radius osculi est aequalis subnormali $= \frac{ydy}{dx} = \frac{sds}{dx}$, quia in A s et y fiunt aequalia. Quare in A erit radius osculi $= 2aP$, vbi P denotat potentiam follicitantem in puncto A.

Corollarium 3.

416. Ex radio osculi in A et potentia follicitante in A inuenitur tempus ascensus vel de-

Cc 2

scen-

scensus per infinite paruum arcum $= \frac{\pi\sqrt{4aP}}{2\sqrt{P}}(172) = \pi\sqrt{a}$. Huicque tempori tempus cuiusque descensus est aequale. In hypothesi ergo grauitatis $= 1$, pendulum longitudinis $2a$ descensus infinite paruos eodem tempore absoluet.

Exemplum I.

417. Sit potentia sollicitans vbique constans nempe $P=g$, erit $\int Pdx=gx$ atque $s=2\sqrt{gax}$, itemque $dy=\frac{dx\sqrt{(ga-x)}}{\sqrt{x}}$, vnde intelligitur curuam esse cycloidem deorsum convexam, prorsus cum linea brachystochrona in eadem potentiae hypothesi congruentem. Quod autem omnes descensus fiant eodem tempore super cycloide jam supra demonstrauius (187).

Exemplum 2.

418. Sit potentia sollicitans vt potestas quaecunque ipsius x , erit $P=\frac{x^n}{f^n}$ et $\int Pdx=\frac{x^{n+1}}{(n+1)f^n}$ si quidem fuerit $n+1$ numerus affirmatiuus; sin enim esset $n+1$ numerus negatiuus, fieret $\int Pdx=\infty$. Erit igitur

$$s=\frac{2x^{\frac{n+1}{2}}}{f^{\frac{n}{2}}}\sqrt{\frac{a}{n+1}} \text{ atque } dy=\frac{dx\sqrt{((n+1)ax^{n-1}-f^n)}}{\sqrt{f^n}}.$$

Ex qua aequatione intelligitur curuam fore rectam vtcunque inclinatam ad
ho-

horizontem, si fuerit $n=1$. At si $n>1$ curua in initio A fit imaginaria, quo vsque nimirum f^n incipit minus esse quam $(n+1)ax^{n-1}$.

Scholion I.

419. Ex aequatione generali apparet rectam AP esse diametrum curuae. Quare cum in vacuo ascentus sint similes descensibus, semioscillationes omnes super curua MA ad alteram partem vsque producta erunt quoque isochronae, et consequenter etiam integrae oscillationes. Deinde cum ob arbitrariam a infinitae sint curuae tautochronae AM, duae quaeque in puncto A coniunctae, vt ibi habeant tangentem communem horizontalem, producent tam semioscillationes quam integras oscillationes isochronas; si scilicet pendulum ita accommodetur vt oscillando huiusmodi curuas absoluat.

Scholion 2.

420. Intelligitur etiam ex solutione eas curuas, quas inuenimus, esse solas, quae quaesito satisfaciunt. Nam loco p alia functio ipsius z substitui nequit, vt in integrali, si ponatur $v=0$, prorsus ex formula exeant b seu h . Id quod aliis methodis, quibus tautochronae sunt inuentae, non satis liquet.

Scholion 3.

421. Quia est $s=2\sqrt{a} \int P dx$, erit $P=\frac{s ds}{2a dx}$.
Ex quo apparet, cuiusmodi esse debeat potentia

follicitans, vt data curua fit tautochrone. Scilicet potentia deorsum tendens debet esse proportionalis ipsi $\frac{sds}{dc}$ ex data curua desumpto. Quare nisi curua sit rectificabilis, valor potentiae follicitantis non potest algebraice exhiberi.

PROPOSITIO 48.

Problema.

Tabula XI.
Fig. 2.

422. Si corpus perpetuo trabatur ad centrum virium C vi quacunque: inuenire lineam tautochronam BMA, super qua corpus omnes descensus ad punctum A usque eodem tempore absoluat.

Solutio.

Dicatur $CA=c$, $CM=y$, et vis centripeta in M corpus follicitans $=P$. Sit porro celeritas in debita altitudini b et ea in M altitudini v . Sumatur $\int Pdy$ ita vt euanescat posito $y=c$, quo facto erit $v=b-\int Pdy$. Sumtis ergo b pro b et $\int Pdy$ pro z , erit functio ipsarum b et z , cui v aequatur, vnus dimensionis, quare erit $m=1$. Si nunc arcus AM dicatur $=s$, erit $s=2\sqrt{az}=2\sqrt{a\int Pdy}$, atque hinc $ds=\frac{aPdy}{\sqrt{a\int Pdy}}$. Si nunc in M ducatur tangens in eamque ex centro C demittatur perpendicularum CT, quod dicatur p , erit $\frac{ydy}{\sqrt{(y^2-p^2)}}=ds$. Quare habebitur $y^2\int Pdy=(y^2-p^2)aP^2$ seu $p^2=y^2-\frac{y^2\int Pdy}{aP^2}$, aequatio pro curua quaesita. Q. E. I.

Co-

Corollarium 1.

423. In puncto A ubi $\int Pdy$ evanescit, erit $p=y$, seu recta CA erit normalis in curuam, in eoque propterea celeritas corporis erit maxima, quia A est punctum curuae centro C proximum.

Corollarium 2.

424. Si ponatur $p=0$, habebitur punctum curuae B; in quo recta CB curuam tangit. In eoque puncto, quod erit supremum, curua cuspidem habebit. Inuenitur vero punctum B ex hac aequatione $aP^2=\int Pdy$; atque y non poterit esse maior, quam valor ex hac aequatione inuentus.

Corollarium 3.

425. Apparet etiam ex aequatione inuenta $s=2\sqrt{a\int Pdy}$, quia signum radicale signum ambiguum inuoluit, curuam duos habere ramos AB et AD inter se similes et aequales; et hanc ob rem oscillationes, quae super curua BAD fiunt, esse inter se aequales.

Corollarium 4.

426. Radius osculi in puncto A est $=\frac{2acP}{c-2aP}$. Et quia est $AC=c$, erit tempus, quo vnus descensus super curuae AB portione infinite parua absoluitur $=\pi\sqrt{a}$ (207.), huic igitur tempori omnes descensus erunt aequales. Hanc ob rem oscillatio-

lationes, quae fiunt super curua BAD isochronae erunt cum oscillationibus penduli in grauitatis hypothefi, cuius longitudo est $= 2a$.

Exemplum I.

427. Sit vis centripeta directe proportionalis distantii a centro vt fit $P = \frac{y}{f}$, erit $\int P dy = \frac{y^2 - c^2}{2f}$. Hinc ergo erit $AM = r = \sqrt{\frac{2a(y^2 - c^2)}{f}}$, atque $p^2 = yy - \frac{f(yy - cc)}{2a}$. Huius curuae radius osculi in puncto M, qui est $\frac{y dy}{dp}$, inuenitur $= \frac{2a}{2a - f} \sqrt{(2a - f)y^2 + c^2}$. Ex quo sequitur si fuerit $2a > f$ curuam versus centrum C fore conuexam vt exhibet figura. At si fuerit $2a = f$, curua euadet linea recta in A normalis ad rectam AC. Punctum autem B vbi CB tangit curuam inuenitur ex hac aequatione $(f - 2a)yy = cc$, ex qua fit $BC = \frac{c\sqrt{f}}{\sqrt{f - 2a}}$. Quoties ergo accidit vt fit $f > 2a$ seu curua conuexa versus C, habebit curua cuspidem in B. Atque in his casibus curua erit hypocyclois, quae generatur rotatione circuli, cuius diameter est $= \frac{2\sqrt{f - c}\sqrt{f - 2a}}{\sqrt{f - 2a}}$, super concaua parte circuli centro C radio $= \frac{c\sqrt{f}}{\sqrt{f - 2a}}$ descripti. Hoc ergo casu curuae tautochronae conueniunt cum brachystochronis supra inuentis (390). At si $2a > f$ quo casu curua est concaua versus C, fit BC imaginaria et curua AM non amplius est hypocyclois. Tum autem erit $p^2 =$

(2a -

$\frac{(2a-f)yy+ccf}{2a}$, unde p vbique praeter in A erit maior quam AC. Sit $c=0$, fiet $p=y \sqrt{\frac{2a-f}{2a}}$, quare hoc casu curvae tautochronae erunt omnes spirales logarithmicae circa centrum C descriptae. Corpus scilicet super spirali logarithmica perpetuo eodem tempore ad centrum C pertinet, vbicunque descensum inceperit. Hac igitur vis centripetae hypothese tautochronae erunt, primo omnes hypocycloides, deinde omnes lineae rectae vtcunque ductae, tertio omnes spirales logarithmicae, et quarto infinitae curvae aliae hac aequatione contentae $p^2 = \frac{(2a-f)y^2+ccf}{2a}$ si quidem fuerit $2a > f$ et $c \neq 0$. In hac autem vis centripetae hypothese pro tautochronis tantum dederunt hypocycloides Newtonus in Princ. et Hermannus in Phoronomia et Comment. Acad. Petrop. A. 1727. quamvis hic aequationem aequae generalem ac nostram habuerit.

Exemplum 2.

428. Ponatur vis centripeta reciproce proportionalis quadratis distantiarum a centro, vt fit $P = \frac{ff}{yy}$, erit $\int P dy = -\frac{ff}{y} + \frac{ff}{c} = \frac{ff(y-c)}{cy}$. Curua igitur AM erit $= 2\sqrt{\frac{a(y-c)}{cy}}$; atque $pp = \frac{acffyy+cy^5-y^6}{acf}$, unde inuenitur radius osculi $\frac{ydy}{dp} = \frac{2acfyy(acff+cy^3-y^4)}{2acff+5cy^3-6y^4}$. Vbi ergo p euanescit ibi etiam radius osculi fit $= 0$. Ipsius BC valor autem reperietur ex hac aequatione $y^4 = cy^3 + acff$. Si igitur ponatur $BC = k$, erit a

Tom. II. Dd =

$= \frac{k^4 - ck^3}{c^2 f}$, id quod assumi potest, quia k est quantitas arbitraria. Ceterum apparet hanc curuam intra A et B habere posse punctum flexus contrarii, id quod euenit, si curua in A est concaua versus C, nempe si fuerit $2aff > c^3$.

Exemplum 3.

429. Sit vis centripeta vbique constans seu $P=1$, erit $\int P dy = y - c$. Quare si centro C radio CM ducatur arcus MP, erit $\int P dy = AP$, atque arcus $AM = 2\sqrt{a(y-c)} = 2\sqrt{a} \cdot AP$. At erit porro $p^2 = y^2 - y^2 \frac{(y-c)}{a} = \frac{(a+c)y^2 - y^3}{a}$, vnde inuenitur $BC = a + c$, et curua $AM = 2a = 2(BC - AC)$. Radius osculi vero in puncto M erit $= \frac{2y\sqrt{(a+c-y)a}}{2a+2c-3y}$. In puncto ergo infimo A erit radius osculi $= \frac{2ac}{2a-c}$. Curua igitur in A erit concaua versus C si $2a > c$ at conuexa si $c > 2a$, atque radius osculi in A erit infinite magnus, si $2a = c$. Primo casu, quo curua in A est concaua versus C, curua habebit punctum flexus contrarii, vbi est $CM = \frac{2}{3}(a+c) = \frac{2}{3}BC$. Si est $c=0$, ita vt punctum A in centrum C cadat, fiet y chorda huius curuae, eritque $AM = 2\sqrt{ay}$, cuius curuae radius osculi in ipso centro C est infinite paruus, atque est $p = y\sqrt{\frac{a-y}{a}}$, curua autem ipsa per quadraturam circuli potest construi.

PRO-

PROPOSITIO 49.

Problema.

430. Si corpus sollicitetur a potentiis quibuscunque, inuenire curuam AM, super qua omnes descensus ad punctum A usque fiant aequalibus temporibus.

Tabula XI.
Fig. 3.

Solutio.

Quaecunque fuerint potentiae sollicitantes, eae omnes reduci possunt ad duas, quarum altera corpus perpetuo deorsum trahat secundum MQ, altera vero horizontaliter secundum MP. Sit vis, quae secundum MQ trahit = P, et vis quae secundum MP trahit = Q: dicantur AP = x, PM = y, AM = s, sitque celeritas in puncto A debita altitudini b et celeritas in M debita altitudini v. His positis erit $v = b - \int P dx - \int Q dy$. Quare si ponatur $b = b$ et $\int P dx + \int Q dy = z$, erit v functio vnius dimensionis ipsarum b et z, et propterea $m = 1$ (408). Quamobrem habebitur pro curua quaesita ista aequatio $s = 2\sqrt{az} = 2\sqrt{a(\int P dx + \int Q dy)}$, seu $ds = \frac{aPdx + aQdy}{\sqrt{a(\int P dx + \int Q dy)}}$. At quia est $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ erit $\frac{dy}{dx} = \frac{aPQ + \sqrt{(\int P dx + \int Q dy)(aP^2 - \int P dx - \int Q dy + aQ^2)}}{\int P dx + \int Q dy - aQ^2}$. In ipso ergo principio A, vbi est $\int P dx + \int Q dy = 0$, erit $Pdx + Qdy = 0$, seu $dy : dx = -P : Q$. Atque vt ex praecedentibus intelligitur tempus cuiusque descensus aequatur tempori, quo in hypothesi grauitatis

tis = 1 pendulum longitudinis 2a descensum absoluit. Q. E. I.

Scholion.

431. Si habeatur curua, super qua omnes descensus fiunt eodem tempore, facile erit dare curuas super quibus oscillationes omnes eodem tempore peragantur. Nam quia in vacuo ascensus similes sunt descensibus, omnis curua, quae est tautochrone pro descensibus, talis quoque erit pro ascensibus. Quare duae curuae tautochronae coniunctae in puncto A dabunt curuam, super qua omnes oscillationes sunt isochronae. Attamen hac ratione alterum problema, quo curuae omnes oscillationes isochronas producentes requiruntur, non perfecte soluitur: dari enim possunt curuae infinitae huic quaestioni satisfaciennes, quarum tamen partes non sint aptae ad descensus solos isochronos efficiendos. Problema autem hoc modo proponi potest: data curua quacunque inuenire aliam, quae cum ea coniuncta producat omnes oscillationes aequidiurnas. Nunc vero antequam ad haec progrediamur, aliud problema proferemus, in quo quaeritur curua datae curuae adiungenda, ut omnes descensus super hac curua composita absoluantur temporibus aequalibus. Quod problema ut maxime difficillimum mihi quondam erat propositum a Cl. Dan. Bernoulli. Attamen hac methodo, qua in investigatione tautochronarum vtor, etiam istud problema resolui potest.

PRO-

PROPOSITIO 50.

Problema.

432. *In hypotthesi grauitatis vniformis deorsum tendentis, si detur curua ANB, inuenire curuam B MF ei adiungendam, ut omnes descensus super hac curua composita ad A usque absoluantur aequalibus temporibus, in quocunque curuae BMF puncto descensus incipiat.*

Tabula XI.
Fig. 4.

Solutio.

Si descensus incipiat in infimo curuae quae-
sitae puncto B, descensus fiet per datam curuam
BNA tantum, eius ergo tempori, quod etiam da-
bitur, aequalia esse debent omnium descensuum
tempora. Sit $AD=a$, $AQ=u$, $AN=t$; dabitur-
que aequatio inter u et t . Pro curua autem quae-
sitae fit $BP=x$ et $BM=s$. Nunc in descensu quo-
cunque sit celeritas in puncto B debita altitudi-
ni b , erit celeritas in M debita altitudini $b-x$;
atque celeritas in N debita altitudini $a+b-u$.
Tempus ergo descensus per curuam incognitam
est $\int \frac{ds}{\sqrt{b-x}}$ ita integratum vt euanescat posito x
 $=0$, et post integrationem posito $x=b$. Tem-
pus vero per curuam cognitam BNA erit $\int \frac{dt}{\sqrt{a+b-u}}$,
ita integratum vt euanescat posito $u=0$, atque
post integrationem posito $u=a$. Expressio ergo
 $\int \frac{ds}{\sqrt{b-x}}$ postquam factum est $x=b$, ita debet esse
com-

comparata, vt si addatur ad expressionem temporis per BNA, ex aggregato penitus egredia-
tur littera b : tum enim totius tempus descen-
sus erit quantitas constans neque pendens a b seu
a puncto curuae BMF, in quo descensus incepit.

Sit integrale $\int \frac{dt}{\sqrt{a+a-u}}$ postquam positum est $u=a$
aequale huic seriei $k+ab+\beta b^2+\gamma b^3+\delta b^4+$
etc. $+\zeta \sqrt{b}+\eta b\sqrt{b}+\theta b^2\sqrt{b}+2b^3\sqrt{b}+$ etc.

Quare si descensus in puncto B incipiat, tempus
totius descensus erit $=k$, ob euanescentem b .

Ipsi k ergo aequale esse debet tempus totius de-
scensus per curuam compositam, in quocunque
curuae BMF puncto ponatur initium descensus.

Sit nunc curuae quaesitae BMF natura sequente
serie expressa $ds = -A dx \sqrt{x} - B x dx \sqrt{x}$
 $- C x^2 dx \sqrt{x} - D x^3 dx \sqrt{x} - \text{etc.} - F dx - G x dx -$
 $H x^2 dx - I x^3 dx - \text{etc.}$ Ponatur peripheriae ad
diametrum ratio $\pi:1$, quae reuera est $l-1:\sqrt{-1}$,
ita vt sit $\pi = -\frac{l-1}{\sqrt{-1}} = \sqrt{-1} l - 1$. Est vero

post integrationem, posito $x=b$, $\int \frac{A dx \sqrt{x}}{\sqrt{(b-x)}} = \frac{1}{2} \pi A b$;

$\int \frac{B x dx \sqrt{x}}{\sqrt{(b-x)}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \pi B b^2$; $\int \frac{C x^2 dx \sqrt{x}}{\sqrt{(b-x)}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \pi C b^3$ etc.

Atque $\int \frac{F dx}{\sqrt{(b-x)}} = 2 F \sqrt{b}$; $\int \frac{G x dx}{\sqrt{(b-x)}} = \frac{2}{3} 2 G b \sqrt{b}$; $\int \frac{H x^2 dx}{\sqrt{(b-x)}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} 2 H b^2 \sqrt{b}$; etc. Quo igitur horum terminorum

cum illis terminis coniunctim tempus per BNA ex-
primentibus aggregatum aequetur ipsi k , termini
homogenei b inuoluentes sese tollere debent. Fiet

igitur $\frac{1}{2} \pi A = \alpha$ seu $A = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{\pi}$; similique modo $B =$
 $\frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{\beta}{\pi}$; $C = \frac{2}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{\gamma}{\pi}$ etc. Atque $F = \frac{\zeta}{2}$; $G = \frac{3}{2} \cdot \frac{\eta}{2}$;

$H =$

$H = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\theta}{2}$; $I = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{2}$ etc. Quamobrem cum α , β , γ , δ , etc. ζ , η , θ , ι etc. sint quantitates cognitae propter curuam ANB datam; habebitur pro curua quaesita BMF ista aequatio: $ds = \frac{-dx}{\pi}$ ($\frac{2}{1} \alpha \sqrt{x} + \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3} \beta x \sqrt{x} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{1 \cdot 3 \cdot 5} \gamma x^2 \sqrt{x} + \text{etc.}$) $\frac{-dx}{2}$ ($\zeta + \frac{3}{2} \eta x + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \theta x^2 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} \iota x^3 + \text{etc.}$), cuius integralis est $s = \frac{-2}{\pi}$ ($\frac{2}{3} \alpha x \sqrt{x} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \beta x^2 \sqrt{x} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \gamma x^3 \sqrt{x} + \text{etc.}$) $-\frac{1}{2}$ ($\zeta x + \frac{3}{4} \eta x^2 + \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6} \theta x^3 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 6 \cdot 8} \iota x^4 + \text{etc.}$). Cuius seriei hanc do constructionem: sumatur $\int \frac{dt}{\sqrt{(a-u)}} - \int \frac{dt}{\sqrt{(a+d-u)}}$ ita vt euanescat posito $u=0$, tum fiat $u=a$, et prodibit functio quaedam ipsius b . Ponatur $x(1-z)$ loco b et quod prodit sit R . Tum integretur $\frac{Rdz}{\sqrt{z}}$ dum x vt constans consideretur, ita vt euanescat posito $z=0$. Deinde ponatur $z=1$, et prodibit functio ipsius x quae erit $= \frac{\pi s}{\sqrt{x}}$. Hocque modo prodibit aequatio pro curua quaesita. Q. E. I.

Scholion I.

433. Constructio haec prorsus singularis sed facilis tamen sequitur ex ea methodo, qua vsus sum in aequatione a C. Riccati quondam proposita construenda, atque hac potissimum gaudet praerogatiua, quod quaecunque fuerit curua data, quaesita eius ope semper possit construi, etiamsi aequatio ipsa, quae pro curua inuenitur minime saepe tractari possit. Dat praeterea statim aequationem finitam eam, quae alias ex summatione serierum inueniretur.

Co-

Corollarium I.

434. Si in aequatione pro curua BMF inventa ponatur $x=0$, erit $ds = -\frac{\zeta dx}{2}$, vnde inclinatio curuae in B ad verticalem BP innotescit. Quo igitur appareat, quomodo hae duae curuae inuicem cohaereant, oportet quoque positionem tangentis curuae ANB in B determinare.

Corollarium 2.

435. Sit $DQ=p$ et $BN=q$, erit $dt = -dq$ et $a-u=p$. Vnde tempus per BNA erit $= \int \frac{dq}{\sqrt{(b+p)}}$ posito in hoc integrali $p=a$. Sit in ipso puncto B, $dq=Ldp$, erit generatim $dq=Ldp+Pdp$, existente P tali functione ipsius p , quae euanescat posito $p=0$. Videamus ergo euanescente p qualem terminum haec aequatio $\int \frac{dq}{\sqrt{(b+p)}} = \int \frac{Ldp}{\sqrt{(b+p)}}$ producat. Prodit autem posito $p=a$, $2L\sqrt{(b+a)} - 2L\sqrt{b}$, vnde in serie initio assumpta prodit terminus $-2L\sqrt{b}$, qui conuenit cum $\zeta\sqrt{b}$, erit ergo $L = -\frac{\zeta}{2}$ et $dq = -\frac{\zeta dp}{2}$. Ex quo intelligitur curuam datam et quaesitam in puncto coniunctionis B communem habere tangentem.

Scholion 2.

436. Dixi $2L\sqrt{(b+a)} - 2L\sqrt{b}$ in serie dare hunc terminum $-2\frac{\zeta}{2}\sqrt{b}$; nam $\sqrt{(b+a)}$, dat terminos hos $\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}} + \text{etc.}$ cum aliis comparan-

parandos. Hic autem solus terminus Ldp dat terminum huius formae $\zeta \sqrt{b}$. Quare ex eo tantum de inclinatione curvae in B concludere licet.

Scholion 3.

437. Constructio curvae quaesitae quam de^o di etiam hoc modo immutari potest, scribatur postquam in integrali $\int \frac{dt}{\sqrt{(a-u)}} - \int \frac{dt}{\sqrt{(a+b-u)}}$ positum est $u=a$, loco b hoc xz , et vocato eo, quod prodit R, integretur $\frac{Rdz}{\sqrt{(1-z)}}$, in quo x ut quantitas constans tractetur, ita ut evanescat posito $z=0$. Tum ponatur $z=1$, atque id quod prouenit, aequetur ipsi $\frac{\pi s}{\sqrt{x}}$; hacque ratione plerumque commodius aequatio pro curua quaesita obtinetur.

Exemplum 1.

438. Sit curua data ANB cyclois ita ut sit $t=2\sqrt{cu}$, seu $dt=\frac{cdx}{\sqrt{cu}}$; erit $\int \frac{dt}{\sqrt{(a-u)}} - \int \frac{dt}{\sqrt{(a+b-u)}} = \int \frac{du\sqrt{c}}{\sqrt{(au-u^2)}} - \int \frac{du\sqrt{c}}{\sqrt{(au+bu-u^2)}} = \sqrt{c} \int \frac{du}{\sqrt{(a-u)}} - \sqrt{c} \int \frac{du}{\sqrt{(a+b-u)}}$. Ponatur $u=a$ et habebitur $\sqrt{c} \int \frac{du}{\sqrt{(a-u)}} - \sqrt{c} \int \frac{du}{\sqrt{(a+b-u)}} = \pi\sqrt{c} - 2\sqrt{c} \int \frac{du}{\sqrt{(a+b-u)}}$. Ponatur xz loco b et habebitur $R = \pi\sqrt{c} - 2\sqrt{c} \int \frac{du}{\sqrt{(a+b-u)}}$, quo multiplicato per $\frac{dz}{\sqrt{(1-z)}}$ habebitur $\frac{\pi dz\sqrt{c}}{\sqrt{(1-z)}} - 2\sqrt{c} \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z)}} \int \frac{du}{\sqrt{(a+b-u)}}$, cuius integrale est $= -2\sqrt{c} \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z)}} \int \frac{du}{\sqrt{(a+b-u)}}$. Tom. II. Ee

218 CAPUT SECUND. DE MOTU PUNCTI

$$= \frac{2\sqrt{-c(a+x)}}{\sqrt{x}} \frac{\sqrt{-a(1-z)} - \sqrt{z(a+x)}}{\sqrt{-a(1-z)} + \sqrt{z(a+x)}} + 2\pi\sqrt{c} - 2\sqrt{c}\sqrt{-1}.$$

$$l-1$$
, qui duo ultimi termini sunt inter se aequales ob $\pi = \sqrt{-1}$. $l-1$. Ponatur nunc $z=1$ habebitur $\frac{-2\sqrt{ac} + 2\sqrt{c(a+x)}}{\sqrt{x}}$ π , quod aequale est ponendum ipsi $\frac{\pi^s}{\sqrt{x}}$. Hinc prouenit ista aequatio $s = -2\sqrt{ac} + 2\sqrt{c(a+x)}$ seu $s + \text{ANB} = \text{ANBM} = 2\sqrt{c}(\text{AD} + \text{BP})$. Ex quo patet curuam BME esse continuationem datae AND, ita ut coniunctae totam cycloidem constituent; id quod ex natura tautochronismi, cui cyclois satisfacere inuenta est, per se sequitur.

Exemplum 2.

439. Sit linea data ANB recta ad horizontem utcumque inclinata erit $dt = ndu$, atque $\int \frac{ndu}{\sqrt{(a-u)}}$

$$= \int \frac{ndu}{\sqrt{(a+b-u)}} = 2n\sqrt{a} - 2n\sqrt{(a-u)} - 2n\sqrt{(a+b)} + 2n\sqrt{(a+b-u)}.$$
 Ponatur $u=a$ atque $b=xz$, erit $R = 2n\sqrt{a} + 2n\sqrt{xz} - 2n\sqrt{(a+xz)}$. Quamobrem erit $\int \frac{Rdz}{\sqrt{(1-z)}}$

$$= 2n \int \frac{dz\sqrt{a}}{\sqrt{(1-z)}} + 2n\sqrt{x} \int \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{(1-z)}} - 2n \int \frac{dz\sqrt{(a+xz)}}{\sqrt{(1-z)}} = 4n\sqrt{a} - 4n\sqrt{a(1-z)} + 2n\sqrt{x} \int \frac{zdz}{\sqrt{(z-z^2)}} - 2n \int \frac{adz + xzdz}{\sqrt{(a-az+xz-xz^2)}}.$$
 Est vero $\int \frac{zdz}{\sqrt{(z-z^2)}} = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{\sqrt{(z-z^2)}} = \sqrt{(z-z^2)} = \frac{1}{2}\pi$, postquam in integrali positum est $z=1$. At $\int \frac{adz + xzdz}{\sqrt{(a-az+xz-xz^2)}}$, si post integrationem ponatur $z=1$, dat $\sqrt{a} + \frac{a+x}{2\sqrt{x}}$ A. $\frac{2\sqrt{ax}}{a+x}$, denotante A. $\frac{2\sqrt{ax}}{a+x}$ arcum circuli radii $=1$, cuius sinus est $\frac{2\sqrt{ax}}{a+x}$. Quocirca erit $\frac{\pi b}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}n\sqrt{a} + n\pi\sqrt{x} - 2n\sqrt{a} - \frac{n(a+x)}{\sqrt{x}}$ A. $\frac{2\sqrt{ax}}{a+x}$, hinc-

hincque $s = nx + \frac{2n\sqrt{ax}}{\pi} - \frac{n(a+x)}{\pi} A. \frac{2\sqrt{ax}}{a+x}$. Huius aequationis differentialis est $ds = ndx - \frac{ndx}{\pi} A. \frac{2\sqrt{ax}}{a+x} = \frac{sdx + nadx}{a+x} - \frac{2ndx\sqrt{ax}}{\pi(a+x)}$. Curua haec autem non vltra datam altitudinem poterit ascendere vt in F vsque, vbi erit $ds = dx$. Posito igitur $ds = dx$, erit $\frac{n-1}{n} = \frac{1}{\pi} A. \frac{2\sqrt{ax}}{a+x}$. Fiat ergo vt $n : n-1$ ita semiperipheria circuli cuius radius est 1, ad arcum eiusdem circuli, cuius cosinus sit m , erit $\frac{a-x}{a+x} = m$ atque $x = \frac{a(1-m)}{1+m}$. Vt si fuerit angulus DAB, 60° , erit $n=2$, et $m=0$, ideoque $BE = a = AD$. Ex quo sequitur, si angulus DAB fuerit maior quam 60 . grad. fore $x > a$, at si ille angulus minor fuerit quam 60° , fore $x < a$. Ceterum ex aequatione differentiali apparet, vt jam notauimus in puncto B fore $ds = ndx$, tum vero perpetuo fieri $ds < ndx$, vsque in F, vbi est $ds = dx$.

Corollarium 3.

440. Si linea recta BNA fuerit horizontalis erit $n = \infty$ et $a = 0$. Si autem fit $n\sqrt{a} = \sqrt{f}$, erit $ds = \frac{sdx}{x} - \frac{2dx\sqrt{fx}}{\pi x}$ ex aequatione differentiali inventa, cuius integrale est $\frac{s}{x} = \frac{-2}{\pi} \int \frac{dx\sqrt{f}}{x\sqrt{x}} = \frac{4\sqrt{f}}{\pi\sqrt{x}}$, ideoque $s = \frac{4}{\pi} \sqrt{fx}$. Curua ergo erit cyclois, cuius infimum elementum curuae datae locum tenet.

Ee 2

Cc-

Corollarium 4.

441. Si aequatio differentialis $ds = n dx - \frac{ndx}{\pi} A. \frac{2\sqrt{ax}}{a+x}$ denuo differentietur posito dx constante, prodibit $dds = \frac{-nadx^2}{\pi(a+x)\sqrt{ax}}$. Ex qua aequatione sequitur curuae in B radium osculi fore infinite paruum.

Scholion 4.

442. Ex aequatione generali differentiali $ds = \frac{dx}{\pi} (\frac{2}{1}\alpha\sqrt{x} + \frac{2}{1}\frac{4}{3}\beta x\sqrt{x} + \text{etc.}) - \frac{dx}{2} (\zeta + \frac{3}{2}\eta x + \text{etc.})$ sequitur semper fore $dds = \infty$ posito $x = 0$, nisi fuerit $\alpha = 0$. Quoties igitur non fuerit $\alpha = 0$ radius osculi curuae quaesitae in B erit $= 0$. At si fuerit $\alpha = 0$, tum radius osculi curuae BMF in puncto B inuenitur $= \frac{\zeta^2}{3\eta} \sqrt{(\frac{\zeta^2}{4} - 1)}$. Ex quo in quouis exemplo proposito statim radius osculi curuae in puncto B innotescit.

Exemplum 3.

443. Si curua data ANB hanc habuerit aequationem, vt fit $dt = Cu^n du$; erit tempus per

$$NA = \int \frac{Cu^n du}{\sqrt{(a+b-u)}}. \text{ Ponatur } a+b=f \text{ et } f-u$$

$$r^2, \text{ erit } u=f-r^2 \text{ et } u^n = f^n - \frac{n}{1} f^{n-1} r^2 + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} f^{n-2} r^4 - \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} f^{n-3} r^6 + \text{etc.}$$

$$\text{Cum vero fit } \frac{du}{(\sqrt{a+b-u})} = -2 dr; \text{ erit } \int \frac{Cu^n du}{\sqrt{(a+b-u)}} = \text{Const. } -2C(f^n r -$$

SVPER DATA LINEA IN VACUO. 221

$\frac{n}{1.3} f^{n-1} r^5 + \frac{n.n-1}{1.2.5} f^{n-2} r^5 - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3.7} f^{n-3} r^7 +$
etc.). Quia autem haec quantitas evanescere de-
bet facto $u=0$ seu $r=\sqrt{f}$; erit quantitas illa
constans addenda $= 2 C f^{n+\frac{1}{2}} (1 - \frac{n}{1.3} + \frac{n.n-1}{1.2.5}$
 $- \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3.7} + \text{etc.})$. Ponatur nunc $u=a$ seu $r=$

\sqrt{b} , atque loco seriei $1 - \frac{n}{1.3} + \frac{n.n-1}{1.2.5} - \text{etc.}$ po-
natur N, prodibit totum descensus per BNA tem-
pus $= 2 C N f^{n+\frac{1}{2}} - 2 C (f^n \sqrt{b} - \frac{n}{1.3} f^{n-1} b \sqrt{b} +$
 $\frac{n.n-1}{1.2.5} f^{n-2} b^2 \sqrt{b} - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3.7} f^{n-3} b^3 \sqrt{b} + \text{etc.})$. Re-
stituatur $a+b$ loco f et orietur hoc tempus $=$

$2 C N (a^{n+\frac{1}{2}} + \frac{(2n+1)}{2} a^{n-\frac{1}{2}} b + \frac{(2n+1)(2n-1)}{2.4} a^{n-\frac{3}{2}} b^2$
 $+ \frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3)}{2.4.6} a^{n-\frac{5}{2}} b^3 + \text{etc.}) - 2 C (a^n \sqrt{b}$
 $+ \frac{2n}{1.3} a^{n-1} b \sqrt{b} + \frac{2n(2n-2)}{1.3.5} a^{n-2} b^2 \sqrt{b} + \frac{2n(2n-2)(2n-4)}{1.3.5.7} a^{n-3} b^3 \sqrt{b} + \text{etc.})$. Haec igitur series cum serie
assumta hoc tempus exprimente comparata dat:

$k = 2 C N a^{n+\frac{1}{2}}$; $\alpha = \frac{2n+1}{2} 2 C N a^{n-\frac{1}{2}}$; $\beta = \frac{(2n+1)(2n-1)}{2.4}$
 $2 C N a^{n-\frac{3}{2}}$; $\gamma = \frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3)}{2.4.6} 2 C N a^{n-\frac{5}{2}}$ etc.
 $\zeta = -2 C a^n$; $\eta = \frac{-2n}{1.3} 2 C a^{n-1}$; $\theta = \frac{-2n(2n-2)}{1.3.5} 2 C a^{n-2}$

etc. Hinc oritur $ds = \frac{-2 C N a^n dx}{\pi} \left(\frac{(2n+1) \sqrt{x}}{1. \sqrt{a}} \right.$
 $+ \frac{(2n+1)(2n-1)x\sqrt{x}}{1.3. a \sqrt{a}} + \frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3)x^2\sqrt{x}}{1.3.5. a^2 \sqrt{a}} + \text{etc.})$
 $+ C a^n dx (1 + \frac{n.x}{1.a} + \frac{n(n-1)x^2}{1.2. a^2} + \frac{n(n-1)(n-2)x^3}{1.2.3. a^3} + \text{etc.})$

Huius vero seriei posterioris summa est $C dx (a$
 $+ x)^n$, huiusque integralis $\frac{C(a+x)^{n+1}}{n+1}$. Quare

Ec 3 post

post integrationem habebitur $s = \frac{C(a+x)^{n+1} - Ca^{n+1}}{n+1}$
 $- \frac{4CNa^n \sqrt{x}}{\pi \sqrt{a}} \left(\frac{(2n+1)}{3} x + \frac{(2n+1)(2n-1)x^2}{3 \cdot 5 \cdot a} \right.$
 $\left. + \frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3)x^3}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot a^2} + \text{etc.} \right)$. Quae est aequatio
 pro curua quaesita BMF, quae toties ex ter-
 minorum numero finito constat, quoties n fue-
 rit terminus huius seriei $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$, etc. Est
 vero $N = \int dp (1-pp)^n$ si post integrationem po-
 natur $p=1$. Hacque facta substitutione est $\int dp$
 $(1-pp)^{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+3} \int dp (1-pp)^n$. Quare si fue-
 rit $n = -\frac{1}{2}$, quia est $\int \frac{dp}{\sqrt{1-pp}} = \frac{\pi}{2}$, erit si $n =$
 $\frac{1}{2}$, $N = \frac{\pi}{4}$; si $n = \frac{3}{2}$ erit $N = \frac{3\pi}{4 \cdot 4}$; si $n = \frac{5}{2}$ erit N
 $= \frac{3 \cdot 5 \cdot \pi}{4 \cdot 6 \cdot 4}$; si $n = \frac{7}{2}$ erit $N = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \pi}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 4}$ etc. At quia
 si $n=0$ est $N=1$, erit si $n=1$, $N=\frac{2}{3}$; si $N=2$,
 erit $N=\frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}$; si $n=3$, erit $N=\frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7}$ etc. Vt si
 curua fuerit cyclois erit $n = -\frac{1}{2}$, ideoque erit s
 $= 2C\sqrt{a+x} - 2C\sqrt{a}$ vt supra inuenimus.
 (438.).

Scholion 5.

444. Quando igitur est $dt = Cu^n du$, hic va-
 lor pro s inuenitur, atque ex ipsa methodi na-
 tura intelligitur: si dt aequetur aggregato ali-
 quot huiusmodi terminorum, tum s aequalem
 fore aggregato serierum a singulis terminis pro-
 ductarum. Hac igitur ratione, si curua data fue-
 rit

rit quaecunque, series est quaerenda terminorum huius formae $Cu^n du$, ipsi dt aequalis. Atque ex iis omnibus debitus ipsius s valor obtinebitur. Vt si fuerit natura lineae datae ANB haec

$dt = \frac{du\sqrt{c}}{\sqrt{u}} + \frac{du\sqrt{a}}{\sqrt{c}}$; primus terminus dat $C = \sqrt{c}$ et $n = -\frac{1}{2}$; vnde fit $s = 2\sqrt{c}(a+x) - 2\sqrt{ac}$, alter terminus dat $C = \frac{1}{\sqrt{c}}$, et $n = \frac{1}{2}$ et $N = \frac{\pi}{4}$ vnde

de oritur $s = \frac{2(a+x)\sqrt{c} - 2\sqrt{ac} - 2x\sqrt{x}}{3\sqrt{c}}$. Curua quaesita ergo sequente aequatione exprimetur $s =$

$$\frac{2(a+3c+x)\sqrt{a+x} - 2(a+3c)\sqrt{a} - 2x\sqrt{x}}{3\sqrt{c}}$$

Exemplum 4.

445. Sit curua data circulus diametri c , erit

$$dt = \frac{\frac{1}{2}c du}{\sqrt{(cu-u^2)}} = \frac{1}{2}c \left(\frac{1}{\sqrt{cu}} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{u}}{c\sqrt{c}} + \right.$$

$\left. \frac{1 \cdot 3 \cdot u\sqrt{u}}{2 \cdot 4 \cdot c^2\sqrt{c}} + \text{etc.} \right)$ Sumto nunc quolibet termino seorsim et inveniatur valor ipsius ds , habebitur colligen-

$$\text{dis omnibus } ds = \frac{c dx}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{c(a+x)}} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{a+x}}{c\sqrt{c}} + \frac{1 \cdot 3 \cdot (a+x)\sqrt{a+x}}{2 \cdot 4 \cdot c^2\sqrt{c}} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{x}}{c\sqrt{c}} - \frac{1 \cdot 3 \cdot x\sqrt{x}}{2 \cdot 4 \cdot c^2\sqrt{c}} \text{ etc.} \right)$$

Ex quibus sequens aequatio nascitur $\frac{2ds}{cdx} =$

$$\frac{1}{\sqrt{(a+x)(c-a-x)}} - \left(\frac{1}{\sqrt{(cx-x^2)}} - \frac{1}{\sqrt{cx}} \right) - \frac{a}{1 \cdot dx} d \left(\frac{1}{\sqrt{(cx-x^2)}} \right) \\ - \frac{1}{\sqrt{cx}} + \frac{1 \cdot \sqrt{x}}{2 \cdot c\sqrt{c}} - \frac{a^2}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} dd \left(\frac{1}{\sqrt{(cx-x^2)}} \right) - \frac{1}{\sqrt{cx}} - \frac{1 \cdot \sqrt{x}}{2 \cdot c\sqrt{c}} \\ - \frac{1 \cdot 3 \cdot x\sqrt{x}}{2 \cdot 4 \cdot c^2\sqrt{c}} - \frac{a^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} d^3 \left(\frac{1}{\sqrt{(cx-x^2)}} \right) - \frac{1}{\sqrt{cx}} - \frac{1 \cdot \sqrt{x}}{2 \cdot c\sqrt{c}}$$

$\frac{1.3.x\sqrt{x}}{2.4.c^2\sqrt{c}} - \frac{1.3.5.x^2\sqrt{x}}{2.4.6.c^3\sqrt{c}} - \text{etc.}$ Quae expressio in multis alias formas transmutari potest.

PROPOSITIO 51.

Problema.

Tabula XI.
Fig. 5.

445. In hypotbesi grauitatis vniformis deorsum tendentis si detur curua quaecunque AM, inuenire curuam AN eiusmodi, vt oscillationes, quae peraguntur super curua composita MAN, sint omnes inter se isochronae.

Solutio.

Sit datae curuae AM abscissa AP= u ; arcus respondens AM= t , dabitur ob curuam datam aequatio inter u et t . Deinde in curua quaesita AN ponatur abscissa AQ= x et arcus AN= s . Iam in oscillatione quacunque sit celeritas in puncto A debita altitudini b ; eritque tempus per MAN= $\int \frac{dt}{\sqrt{(b-u)}} + \int \frac{ds}{\sqrt{(b-x)}}$. Atque si in hac expressione ponatur $u=b$ et $x=b$ prodibit tempus vnus semioscillationis; quod cum debeat esse constans, ex formula id exprimente littera b prorsus euanescere debet. Ponatur $dt = \frac{du\sqrt{f}}{\sqrt{u}} + Pdu$ et $ds = \frac{dx\sqrt{h}}{\sqrt{x}} - Qdx$; eritque tempus vnus semioscillationis $= \int \frac{du\sqrt{f}}{\sqrt{(bu-u^2)}} + \int \frac{dx\sqrt{h}}{\sqrt{(bx-x^2)}} + \int \frac{Pdu}{\sqrt{(b-u)}} - \int \frac{Qdx}{\sqrt{(b-x)}}$ postquam positum est $u=b$ et $x=b$. Huius autem expres-

expressionis duo priores termini jam ita sunt comparati, ut b ex iis euanescat facto $u=b$ et $x=b$, dant nimirum $\pi \sqrt{f} + \pi \sqrt{b}$, denotante π peripheriam circuli diametri $=1$. Quare si posteriores termini ita fuerint comparati, ut sese destruant, facto $u=b$ et $x=b$, habebitur id quod quaeritur; at P et Q tales necesse est sint quantitates, quae b non inuoluant, quia in aequationes curvarum ingrediuntur. At erit $\int \frac{P du}{\sqrt{(b-u)}} - \int \frac{Q dx}{\sqrt{(b-x)}} = 0$ facto $u=b$ et $x=b$, si Q talis fuerit functio ipsius x , qualis P est ipsius u . Seu cum nihil impediatur, quo minus poni possit $x=u$, fiat $x=u$; oportebitque esse $Q=P$. Datur vero $P = \frac{dt}{du} - \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{u}}$. Quo circa pro curva quaesita haec habebitur aequatio $ds = \frac{du \sqrt{b}}{\sqrt{u}} - dt + \frac{du \sqrt{f}}{\sqrt{u}}$, seu $s + t = 2 \sqrt{b} u + 2 \sqrt{f} u$; ex qua aequatione determinatur natura curvae quaesitae AN. Q. E. I.

Corollarium I.

447. Sumta igitur $AP = u = x$; cum sit A Tabula XI.
Fig. 6.
 $M = t$ et $AN = s$, erit $NA + MA = t + s = 2$
 $(\sqrt{f} + \sqrt{b}) \sqrt{AP}$, seu summa arcuum eidem
abscissae respondentium proportionalis est radici
quadratae ex abscissa AP.

Corollarium 2.

448. Curua igitur quaesita AND ita debet esse comparata, ut summa arcuum $AM + AN$ aequalis sit arcui cycloidis eidem abscissae AP respondentis. Ex qua proprietate sponte fluit, omnes oscillationes esse isochronas.

Corollarium 3.

449. Tempus ergo unius oscillationis, aequatur tempori descensus super cycloide, cuius in infimo puncto radius osculi est $2(\sqrt{f} + \sqrt{b})^2$. Seu pendulum huius longitudinis producet semi-oscillationes minimas isochronas oscillationibus super curua MAN. Pendulum vero long. $\frac{1}{2}(\sqrt{f} + \sqrt{b})^2$, peraget totas oscillationes isochronas.

Corollarium 4.

450. Quia quantitatem b pro lubitu accipere licet, infinitae curvae AND satisfaciunt: atque etiam ea poterit determinari ut tempus oscillationis sit datae quantitatis. Ut si una oscillatio isochrona esse debeat oscillationi penduli longitudinis $\frac{L}{4}$; erit $L = 2(\sqrt{f} + \sqrt{b})^2$, ideoque $\sqrt{b} = \sqrt{\frac{L}{2}} - \sqrt{f}$. Quare L maius esse debet quam $2f$.

Corollarium 5.

451. Si data curua AM fuerit cyclois seu $dt = \frac{du\sqrt{f}}{\sqrt{b}}$, altera curua AN erit quoque cyclois quo-

quaecunque, fit enim $ds = \frac{dx\sqrt{b}}{\sqrt{x}}$. Atque super duabus huiusmodi cycloidibus non solum integrae oscillationes erunt isochronae, sed etiam singuli ascensus et descensus super qualibet cycloide absoluentur eodem tempore.

Exemplum I.

452. Sit curua data AM recta vtcunque ad horizontem inclinata, vt fit $dt = n du$, prodibit pro curua quaesita posito $\sqrt{\frac{L}{2}}$ loco $\sqrt{f} + \sqrt{b}$ haec aequatio $ds = \frac{du\sqrt{L}}{\sqrt{2u}} - n du = \frac{dx\sqrt{L}}{\sqrt{2x}} - n dx$. Quare si vocetur $PN = y$, erit $dy = dx \sqrt{(\frac{L}{2x} - \frac{2n\sqrt{L}}{\sqrt{2x}} + n^2 - 1)}$ vbi $\frac{L}{4}$ denotat longitudinem penduli isochroni: ex qua aequatione curua quaesita poterit construi. Curua autem in D habebit punctum reversionis ibique tangentem verticalem, quod habebitur sumendo $AC = \frac{L}{2(n+1)^2}$. Curuae vero in infimo loco A radius osculi est $= L$. Hic praeterea notandum est si $n=1$, quo casu linea AM fit recta verticalis in AC incidens, fore curuam quaesitam algebraicam; erit namque $dy = \frac{dx\sqrt{(L-2\sqrt{2Lx})}}{\sqrt{2x}}$, cuius integralis est $y = \frac{L}{3} - \frac{(\sqrt{L-2\sqrt{2Lx}})\sqrt{(L-2\sqrt{2Lx})}}{3}$ seu $9y^2 - 6Ly = -6L\sqrt{2Lx} + 24Lx - 16x\sqrt{2Lx}$, quae ab irrationalitate prorsus liberata fit quatuor dimensionum. Huius curuae cuspis D habebitur sumendo $AC = \frac{1}{8}L$, quo casu fit $CD = \frac{L}{3}$.

Exemplum 2.

453. Sit curua data AM circulus radii a ; erit $dt = \frac{adu}{\sqrt{(2au-u^2)}}$. Hinc posito $\sqrt{\frac{L}{2}}$ loco $\sqrt{f+Vb}$ erit $ds = \frac{du\sqrt{L}}{\sqrt{2u}} - \frac{adu}{\sqrt{(2au-u^2)}} = \frac{dx\sqrt{L}}{\sqrt{2x}} - \frac{adx}{\sqrt{(2ax-x^2)}}$. Ex qua aequatione sequitur $dy = dx \sqrt{(\frac{L}{2x} - \frac{2a\sqrt{L}}{x\sqrt{(4a-2x)}} + \frac{a^2}{2ax-x^2} - 1)}$. Cuspis curuae AND erit vbi est $\frac{\sqrt{L}}{\sqrt{2x}} = 1 + \frac{a}{\sqrt{(2ax-x^2)}}$ seu $4x^4 + 2Lx^3 - 16ax^3 + L^2x^2 - 8aLx^2 + 24a^2x^2 - 4aL^2x + 12a^2Lx - 16a^3x + 4a^2L^2 - 8a^3L + 4a^4 = 0$. Ponatur $L = a$, fiet $x = 0$ et $4x^3 - 14ax^2 + 17a^2x - 8a^3 = 0$. At si $L = 2a$, erit $x^4 - 3ax^3 + 5a^2x^2 - 2a^3x - a^4 = 0$, vnde fit $x = a = AC$. Hocque casu longitudo penduli isochroni est $\frac{a}{2}$.

Scholion.

454. Si igitur efficiatur, vt pendulum in huiusmodi curua composita oscillationes peragat, eius oscillationes aequae erunt isochronae, ac si in cycloide moueretur. Atque hanc ob rem quaecunque curua ad tautochronismum adhiberi poterit. Restat in hoc negotio ista quaestio, quemadmodum curuam datam comparatam esse oporteat, vt inuenta cum data vnam curuam continuam constituat, id quod sequente propositione praestabimus.

PROPOSITIO 52.

Problema.

455. In hypotesi grauitatis uniformis deorsum
ten-

tendentis inuenire curuam continuam MAN, super qua omnes semiofcillationes absoluantur aequalibus temporibus.

Solutio.

Sit igitur curua MAN curua continua, in ea-
que $AP = x$, et $AM = t$, et $AN = s$. Assumatur
noua indeterminata z atque x et t ita den-
tur in z , vt posita z affirmatiua prodeat curuae
pars AM, at posita z negatiua prodeat curuae pars
AN. Quia nunc pro vtraque parte x eundem obti-
net valorem, debet x talis esse functio ipsius z ,
quae eadem maneat, siue z affirmatiue sumatur
siue negatiue; seu x debet esse functio par ipsius z .
Deinde t eiusmodi esse debet functio ipsius z , vt
prodeat s , si ponatur $-z$ loco z . At quia arcus
 s in alteram partem axis cadit, eius valor erit
negatiuus respectu curuae AM: quare si in valo-
re ipsius t ponatur $-z$ loco z , prodire debet $-s$.
Sit nunc R functio impar ipsius z , et S eius fun-
ctio par; et ponatur $t = R + S$, fiet $-s = -R$
 $+ S$, seu $s = R - S$; vnde fit $t + s =$
 $2R$. Sit longitudo penduli isochroni $= a$, quia
est $\sqrt{2a} = \sqrt{f} + \sqrt{b}$; debet esse $t + s = 2\sqrt{2ax}$;
hincque erit $R = \sqrt{2ax}$, et $x = \frac{R^2}{2a}$. Quia autem
 x debet esse functio par ipsius z ; ex hac expres-
sione id per se obtinetur; cum enim R fit fun-
ctio impar, eius quadratum erit functio par. Sit
igitur $R = z$, erit $z = \sqrt{2ax}$, atque S debet ef-
se functio par ipsius $\sqrt{2ax}$ seu ipsius \sqrt{x} . Quo
facto habebitur ista aequatio $s = \sqrt{2ax} - S$ pro
omnibus curuis continuis tautochronis. Sit $dS =$

$\frac{Tdx}{\sqrt{2ax}}$, erit T functio impar quaecunque ipsius \sqrt{x} . Quapropter fiet $ds = \frac{adx - Tdx}{\sqrt{2ax}}$, atque $dy = \frac{dx\sqrt{(a^2 - 2aT + T^2 - 2ax)}}{\sqrt{2ax}}$, posito $PN = y$. Ex qua aequatione infinitae curvae tautochronae continuae reperiuntur. Q. E. I.

Corollarium I.

456. Curua igitur hoc modo inuenta AN est tautochrone cum sui ipsius parte continua AM . Dantur vero per praecedens problema infinitae aliae curuae AM , quae cum AN coniunctae oscillationes isochronas producant.

Corollarium 2.

457. Per praecedentem propositionem omnis curua AM , cuius haec est aequatio $t = \sqrt{2cx} + S$ seu $dt = \frac{cdx}{\sqrt{2cx}} + \frac{Tdx}{\sqrt{2ax}}$ oscillationes isochronas cum curua AN producit. At harum oscillationum longitudo penduli isochroni est $= \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{c})^2}{4}$.

Corollarium 3.

458. Inter has ergo infinitas curuas AM cum AN oscillationes isochronas producentes ea est continua cum AN in qua est $c = a$. Atque longitudo penduli isochroni fit $= a$, vt assumimus.

Corollarium 4.

459. Si ponatur $c = 0$; erit cum curua AN quoque tautochrone haec curua AM , cuius aequatio est $dt = \frac{Tdx}{\sqrt{2ax}}$ seu $t = S$. Hocque casu longitudo penduli est $\frac{a}{4}$. Quoties ergo est $T = \sqrt{2bx}$;

to-

toties quoque linea recta cum AN tautochronis-
mum producit, si ita fuerit inclinata vt anguli MAP
secans sit $\sqrt{\frac{b}{a}}$ seu cosinus $= \sqrt{\frac{a}{b}}$

Corollarium 5.

460. Quia curua AN in puncto A ad axem
AP normalis esse debet, oportet vt T euanescat
posito $x=0$. Idem etiam sequitur ex eo quod
 $a-T$ debeat esse quantitas affirmatiua saltem in
initio A. Si enim T fieret infinitum posito $x=0$,
id quod infinitis modis accidere potest, ita tamen
vt S euanescat posito $x=0$, curua AN in alteram
axis AP partem cadet, curuaque in A haberet cu-
spidem et corpus postquam super MA descendit
per reflexionem super AN ascenderet, quod esset
contra naturam oscillationum.

Corollarium 6.

461. Si igitur T euanescit posito $x=0$, ra-
dius osculi in A qui est $\frac{sd s}{dx}$, ob $s=y$ in hoc loco,
erit $=a$, ideoque oscillationes congruent cum oscil-
lationibus minimis penduli longitudinis a vt assum-
simus.

Corollarium 7.

462. Curuae portio AN habebit in D tan-
gentem verticalem ibique cuspidem; quod punctum
inuenitur ex hac aequatione $a=T=\sqrt{2ax}$, su-
mendo AC = valori ipsius x ; ex hac aequatione.
Altera quoque pars AM habebit cuspidem si ali-
cubi fuerit $a+\sqrt{2ax}$.

Co-

Corollarium 8.

463. Si fuerit $S=0$ et $T=0$, erit $s=V2ax$. Quare curua erit cyclois atque portio AN aequalis et similis curuae AM. Est ergo cyclois curua continua super qua omnes oscillationes absoluuntur eodem tempore.

Exemplum.

464. Sit $T=V2bx$, quo casu curua AN quoque est tautochrone cum recta angulum AD constituyente, cuius cosinus est $V\frac{a}{b}$; erit $ds=\frac{adx-dx\sqrt{2bx}}{\sqrt{2ax}}$, atque $s=V2ax-\frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$. Habebitur autem $dy=\frac{dx\sqrt{a^2-2a\sqrt{2bx}+2bx-2ax}}{\sqrt{2ax}}$. Quae aequatio etiam congruit cum ea, quam in prop. praec. pro curua inuenimus, quae cum recta tautochronam constituat (452), si modo scribatur L pro a et n pro $V\frac{b}{a}$. Quare si fuerit $b=a$, curua quoque algebraica inuenitur NAM, quae est tautochrone, cuius aequatio est $dy=dx\sqrt{\frac{a-2\sqrt{ax}}{2a}}$, et integralis haec $3y=a-(V a-2\sqrt{2x})V(a-2\sqrt{2ax})$. Quae est ea ipsa curua, quae cum recta verticali tautochronam constituit, vt supra inuenimus (452). Longitudo vero penduli isochroni est $=a$, si corpus in hac curua oscilletur. At si moveatur super recta AC et parte curuae AN, longitudo penduli isochroni erit $\frac{1}{4}a$. Atque si D fuerit cuspis curuae, erit $AC=\frac{1}{8}a$, alter vero ramus AM in infinitum ascendit. Praeter hanc curuam tautochronam algebraicam aliae vix inueniri poterunt.

CAPUT

CAPUT TERTIUM.

DE MOTU PUNCTI SUPER DATA LINEA
IN MEDIO RESISTENTE:

PROPOSITIO 53.

Problema.

465.

SI corpus sollicitetur deorsum a potentia unifor-
g, in medio quocunque resistente; determinare motum
corporis descendens super data curua AM,
et pressionem, quam curua in singulis punctis susti-
net.

Tabul. XII.
Fig. 1.

Solutio.

Ponatur in verticali AP abscissa $= x$, appli-
cata PM $= y$ et arcus AM $= s$; sitque altitudo ce-
leritati corporis in M debita $= v$ et resistentia
in M $= R$. Manifestum jam est ex capite prae-
cedente si nulla esset resistentia fore $dv = gdx$.
Resistentia vero minuit hoc celeritatis incremen-
tum, et aequipollet vi tangentiali $= R$; eiusque
soli effectus in hoc consisteret, ut foret $dv =$
 $-Rds$. Quamobrem si et potentia sollicitans g,
et resistentia R ambae simul in corpus agunt, erit
 $dv = gdx - Rds$, ex qua aequatione celeritas cor-
poris in quouis puncto M est eruenda. Atque si
corpus in A ex quiete descendat, integratio ita
Tom. II. Gg est

est instituenda, vt facto $x=0$ prodeat quoque $v=0$. Verum si data cum celeritate corpus in A descensum incēperit, in integratione effici debet, vt posito $x=0$, fiat v aequalis altitudini debitae illi celeritati initiali. Cum autem inuenta fuerit celeritas corporis, habebitur simul tempus, quo quinis arcus AM absoluitur sumendo $\int \frac{ds}{v}$. Quod ad pressionem, quam curua in M sustinet, spectat, curua in M duplici vi premitur, vi centrifuga scilicet, et vi normali. Ponamus curuam esse conuexam deorsum, et elementum dx constans, erit longitudo radii osculi in contrariam partem normalis MN directi $= \frac{ds^3}{dxddy}$, vnde vis centrifuga erit $= \frac{2vdxddy}{ds^3}$, qua curua secundum directionem MN premitur. Secundum eandem vero directionem curua premitur a vi normali, quae est $= \frac{gdy}{ds}$; vis normalis enim a potentia absoluta g tantum oritur, quia directio vis resistentiae est in tangente sita, ideoque nullam vim normalem generat. Consequenter tota vis, qua curua in M secundum directionem normalis MN premitur est $= \frac{gdy}{ds} + \frac{2vdxddy}{ds^3}$. Q. E. I.

Corollarium I.

466. Expressio ergo vis curuam prementis congruit cum ea, quam in vacuo inuenimus. Neque tamen curua in medio resistente eadem vi premitur qua in vacuo, ob celeritatem a qua vis

cen-

centrifuga pendet, quae a medio resistente variatur.

Corollarium 2.

467. In isto descensu corpus non vt in vacuo maximam habet celeritatem in puncto B, in quo tangens est horizontalis; sed posito $dv=0$, locus in quo corpus maximam habet celeritatem inuenitur ex hac aequatione $gdx=Rds$ seu $\frac{dx}{ds}=\frac{R}{g}$ in eo puncto, vbi sinus anguli, quem tangens curuae cum linea horizontali constituit, est ad sinum totum vt potentia absoluta g ad resistantiam in eo loco.

Corollarium 3.

468. Celeritas corporis igitur augetur vsque ad hoc punctum, in quo celeritas est maxima; vltra vero hoc punctum celeritas iterum decrefcit, quia tum Rds excedit gdx , et hanc ob rem fit dv negatiuum.

Corollarium 4.

469. Si resistantia fuerit vt potestas quaecunque celeritatum, cuius exponens est $2m$, et si medium resistens fuerit vniforme, cuius exponens sit k ; vbi k est altitudo celeritati debita, qua cum corpus mouetur, resistantiam patitur vi grauitati aequalem. Hoc ergo casu erit $R=$

$$Gg^2 \frac{v^m}{k^m}$$

$\frac{v^m}{k^m}$, atque ista habebitur aequatio ad motum de-

finiendum: $dv = gdx - \frac{v^m ds}{k^m}$.

Corollarium 5.

470. Si autem abscissae in axe BQ capiantur, fueritque BQ = x , QM = y , et BM = s , propter harum quantitatum differentialia negativa respectu priorum, habebitur $dv = -gdx + Rds$. Quae aequatio ita est integranda, ut posito $x = 0$ fiat $v = b$, si quidem celeritas in B, quam corpus in hoc puncto obtinet, huic altitudini fuerit debita. At pressio secundum MN, quam curua sustinet, est $= \frac{gdy}{ds} - \frac{2vdxddy}{ds^2}$.

Corollarium 6.

471. Si medium fuerit vniforme cuius exponens sit k , resistentia vero functioni cuicunque ipsius v , quae sit V , proportionalis. Sumatur K talis functio ipsius k , qualis V est ipsius v , erit resistentia $R = \frac{V}{K}$; ideoque habebitur ista aequatio $dv = -gdx + \frac{Vds}{K}$, sumto axe BQ.

Scholion I.

472. Formulam hic duplicem incrementum celeritatis exhibentem dedi pro duobus axibus AP et BQ, quia in sequentibus mox hac mox illa utemur.

utemur. Scilicet quando descensus semper fit ex fixo puncto ut A, utemur priore formula AP pro axe fumente. At si in eadem curua plures descensus ad punctum fixum vsque B sint considerandi, ut in motu oscillatorio vsu venit, posteriore formula utemur, in qua BQ pro axe habetur.

Scholion 2.

473. Quia formula, ex qua motus corporis super data curua determinari debet, ita est comparata, ut indeterminatae paucis casibus a se inuicem separari queant, saepe ex ea nihil, quod ad motum spectat, concludi licet. Quamobrem eos tantum casus euoluere conuenit, quibus aequatio $dv = +gdx + \frac{Vds}{K}$ vel separari vel integrari potest. Hi autem casus omnino ad tres casus generales reducentur. Primus est, quando linea super qua corpus mouetur est recta, tum enim ob $ds = n dx$, aequatio transit in hanc $\frac{+Kdv}{gK-nV} = dx$, in qua indeterminatae sunt a se inuicem separatae. Secundus casus est, quando in V vnica tantum obtinet dimensionem v , tum enim aequatio integrationem admittit. Tertius casus est, quando tam v quam aequatio pro curua ita est comparata, ut in aequatione v et x , vbique eundem dimensionum numerum constituent; tum enim per regulam notam Bernoullianam indeterminatae a se inuicem possunt separari. Hoc autem euenit, si in Vds vnica fuerit dimensio ipsarum v et x . Praeter hos quidem casus essent duo alii, integrationem admittentes, sed qui huc non pertinent.

nent. Primus est si resistentia euanescit, qui vero casus in praecedente Capite iam sufficienter est pertractatus. Alter casus est, si potentia sollicitans *g* euanescit; de quo autem non est opus ut agamus, quia motus super quacunque linea congruit cum motu super linea recta, de quo in praecedente libro iam satis est dictum. Praeterea quoque multis casibus aequatio separationem admittit, si fuerit $V=v^2$, quoties scilicet aequatio procurua ita est comparata, ut aequatio ad casum aequationis, quam quondam Com. Riccati proposuit, potest reduci. Generaliter vero etiam potest in hoc casu celeritas per seriem exhiberi, atque finita expressione definiri, quemadmodum ego generalem aequationis Riccatianae dedi constructionem. Quoties igitur natura rei requireret, praeter tres casus expositos, subinde quoque hunc casum, in quo resistentia biquadrato celeritatis est proportionalis, euoluemus.

Scholion 3.

474. Quia haec de motu in medio resistente tractatio per se est difficilis et intricata, non ad plures vis sollicitantis hypotheses, ut capite praecedente fecimus, eam accommodabimus; sed nobis perpetuo potentia sollicitans erit vniformis et deorsum directa; neque de viribus centripetis multum erimus solliciti. Atque cum potentia sollicitans ponatur vniformis, medium resistens quo-

quoque tale poni conueniet; fluidum enim quod resistantiam generat, ipsam corporis grauitatem minuit, et si id non esset vniforme, potentia absoluta non recte vniformis poneretur. Deinde etiam propter eandem rationem curuam in qua corpus mouetur, totam in eodem plano positam assumemus, quo multas difficultates nullam vtilitatem afferentes remoueamus.

PROPOSITIO 54.

Problema.

475. Si corpus perpetuo sollicitetur deorsum a potentia vniformi g , in medio quocunque resistente; determinare motum corporis super data curua AM ascendentis et pressionem, quam curua in singulis punctis M patitur.

Tabula XII.
Fig. 2.

Solutio.

In verticali AP posita abscissa $AP = x$; $PM = y$ et $AM = s$; sit altitudo celeritati in A debita $= b$; eique in M debita $= v$; atque resistantia in $M = R$. Eritigitur dum corpus ascendit tam potentia sollicitans g , quam resistantia R motui contraria. Hanc ob rem erit simili modo, quo in praecedente prop. $dv = -g dx - R ds$. Ex qua aequatione v ita debet determinari, vt facto $x = 0$ fiat $v = b$. Deinde cum resistantia in pressionem, quam curua patitur, non ingrediatur, erit

240 CAPUT TERTIUM DE MOTU PUNCTI

erit vt supra pressio tota, quam curua in M secundum directionem normalis MN sustinet $= \frac{gdy}{ds}$ $-\frac{2vdxddy}{ds^3}$ posito dx constante; vbi $\frac{gdy}{ds}$ denotat vim normalem, et $-\frac{2vdxddy}{ds^3}$ vim centrifugam, vtramque iuxta MN directam. Q. E. I.

Corollarium 1.

476. In ascensu corporis ergo super quacunque curua celeritas corporis perpetuo imminuitur; atque punctum curuae D reperietur, in quo corporis ascendentis celeritas euanescit, si in aequatione $dv = -gdx - Rds$ post integrationem ponatur $v=0$.

Corollarium 2.

477. Si corpus super curua DMA descenderet, haberetur ista aequatio $dv = -gdx + Rds$, (470.) ex qua intelligitur ascensum non esse similem descensui, vt in vacuo. Sed si resistentia fieret negativa seu accelerans, tum ascensus similis foret descensui. Quare descensus in medio resistente congruet cum ascensu in medio tantumdem accelerante et vicissim.

Corollarium 3.

478. Quoniam aequatio pro ascensu hoc tantum differt ab aequatione pro descensu, quod resistentia R valorem induat negativum; intelligitur iisdem casibus, quibus aequatio pro descensu

fa separari vel integrari potest, iisdem quoque aequationem pro ascensu simili modo tractari posse.

Corollarium 4.

479. Si fuerit $R = \frac{v}{K}$, erit pro ascensu super curua AM haec aequatio $dv = -gdx - \frac{v ds}{K}$. At pro descensu habetur $dv = -gdx + \frac{v ds}{K}$. Quare si illa aequatio poterit integrari simul quoque huius aequationis habebitur integrale ponendo tantum $-K$ loco K .

Scholion.

480. Secundum tres igitur casus supra memoratos, quibus aequatio inuenta vel separari vel integrari potest, tam descensum quam ascensum pertractabimus, si scilicet detur curua super qua motus fieri ponitur. Deinde autem ex datis potentia sollicitante, resistentia et pressione curuam inuestigabimus. Tertio si motus quaedam proprietas fuerit proposita, curuam determinabimus, quae in data resistentiae hypothese satisficiat. Praeterea sequentur alia problemata, in quibus harum quatuor rerum resistentiae, motus, pressiones et curuae duae dantur, reliquae duae requiruntur. Habebimus deinceps quoque problemata indeterminata, quibus omnes curuae requiruntur, super quibus corpus descendens vel eandem celeritatem acquirit vel eas eodem tempore absoluit.

Tum fequetur doctrina de lineis brachystochronis, atque tandem caput concludet de motu oscillatorio tractatio.

PROPOSITIO 55.

Problema.

Tabula XII. 481. *In medio resistente vniformi quocunque et*
 Fig. 3. *hypothesi grauitatis vniformis g, determinare motum*
corporis descendentis super linea recta AMB ad ho-
rizontem vtcunque inclinata.

Solutio.

Posita $AP=x$ erit $AM=s=nx$; et quia medium resistens est vniforme, erit resistentia $R=\frac{v}{K}$. Posita ergo altitudine celeritati in M debita $=v$, erit $dv=gdx-\frac{nvdx}{K}$ (465.). Vnde fit $\frac{Kdv}{gK-nv}=dx$, in qua aequatione indeterminatae sunt a se inuicem separatae: erit ergo $x=\int \frac{Kdv}{gK-nv}$, in qua integratione efficiendum est vt posito $x=0$ fiat $v=0$, si quidem descensus in A ex quiete incipiat. Sin vero habeat celeritatem initialem haec per integrationem est introducenda. Tempus per spatium AM est $=\int \frac{ndx}{v}$. Posito ergo loco dx eius valore in v , habebitur tempus per AM $=\int \frac{nKdv}{(gK-nv)\sqrt{v}}$ quod integrale ita est sumendum, vt posita $\sqrt{v}=c$ celeritati initiali in A euanescat. Pressio vero quam linea in quouis puncto M sustinet, est

SUPER DATA LINEA IN MEDIO RES. 243

est constans nempe aequalis vi normali $= \frac{g'y}{ds} = \frac{g\sqrt{(n^2-1)}}{n}$, quia vis centrifuga euanescit ob $ddy=0$.

Q. E. I.

Corollarium I.

482. Celeritas corporis ergo tam diu acceleratur, quam diu est $gK > nV$. At si semel fuerit $gK = nV$ corpus neque accelerabitur neque retardabitur. Diminuetur vero corporis celeritas si in initio A fuerit $nV > gK$.

Corollarium 2.

483. Si ergo corpus in A descensum a quiete incipiat motus perpetuo crescet, ita tamen ut semper sit $gK > nV$, quippe quae est vltima celeritas, quam descensu per infinitum spatium demum acquirit.

Corollarium 3.

484. Quo maior ergo est angulus BAC, eo minor est vltima, quam corpus acquirere potest celeritas. Maximam vero celeritatem vltimam, qua aequabiliter progreditur, acquirit descensu super recta verticali AC.

Corollarium 4.

485. Si resistentia fuerit ut potestas indicis $2m$ celeritatum, erit $V = v^m$ et $K = k^m$, vnde

Hh 2

ista

ista habebitur aequatio $x = \int \frac{k^m dv}{g \cdot k^m - n v^m}$, atque
tempus per A M $= \int \frac{n k^m dv}{(g k^m - n v^m) \sqrt{v}}$

Exemplum I.

486. Resistat medium in simplici ratione celeritatum, erit $2m=1$, atque $dv = g dx - \frac{ndx \cdot v}{\sqrt{k}}$. Hinc fit $x = \int \frac{dv \sqrt{k}}{g \sqrt{k} - n \sqrt{v}} = -\frac{2 \sqrt{k} v}{n} + \frac{2 g k}{n^2} \int \frac{g \sqrt{k}}{g \sqrt{k} - n \sqrt{v}}$: vel per seriem $x = \frac{2v}{g} + \frac{2nv \sqrt{v}}{3g^2 \sqrt{k}} + \frac{2n^2 v}{4g^3 k} + \frac{2n^3 v^2 \sqrt{v}}{5g^4 k \sqrt{k}} +$ etc. si quidem descensus in A ex quiete incipiat. Tempus autem per spatium A M erit $= \int \frac{ndv \sqrt{k}}{g \sqrt{k} - n v} = 2 \sqrt{k} \int \frac{g \sqrt{k}}{g \sqrt{k} - n \sqrt{v}}$. Quare si tempus per A M ponatur $= t$, erit $nx + 2 \sqrt{k} v = \frac{g t \sqrt{k}}{n}$. Atque in serie $t = \frac{2n \sqrt{v}}{g} + \frac{2n^2 v}{2g^2 \sqrt{k}} + \frac{2n^3 v \sqrt{v}}{3g^3 k} + \frac{2n^4 v^2}{4g^4 k \sqrt{k}} +$ etc. Si ergo corpus in descensu per AB acquisiuit celeritatem altitudini b debitam, ex hac reperitur altitudo AC $= -\frac{2 \sqrt{b} k}{n} + \frac{2 g k}{n^2} \int \frac{g \sqrt{k}}{g \sqrt{k} - n \sqrt{b}}$.

Exemplum 2.

478. Resistat medium in duplicata ratione celeritatum, erit $m=1$ et $x = \int \frac{k dv}{g k - n v} = \frac{k}{n} \int \frac{g k}{g k - n v}$, si quidem corpus in A ex quiete ascensum inchoauerit. Quare si e sit numerus, cuius logarithmus est vnita, erit $e^{\frac{nx}{k}} = \frac{g k}{g k - n v}$; atque $v = \frac{g k}{g k - n v}$.

$$\frac{gk(e^{\frac{nx}{k}} - 1)}{ne^{\frac{nx}{k}}} = \frac{gk}{n} (1 - e^{-\frac{nx}{k}}). \text{ Hanc ob rem si}$$

corpus in B habuerit celeritatem altitudini b debitam, erit $AC = \frac{k}{n} \int \frac{gk}{gk - nb}$. Atque si corpus per spatium infinitum descendat, habebit celeritatem altitudini $\frac{gk}{n}$ debitam. Tempus vero per spatium AM erit $= \int \frac{nkdv}{(gk - nv)\sqrt{v}} = \frac{\sqrt{nk}}{\sqrt{g}} \int \frac{\sqrt{gk} + \sqrt{nv}}{\sqrt{gk} - \sqrt{nv}}$. Per series tam spatium x , quam tempus commode exprimitur; id quod generaliter pro quouis valore litterae m in sequente exemplo monstrabimus.

Exemplum 3.

488. Sit resistentia ut potestas exponentis $2m$ celeritatum, erit $dx = \frac{k^m dv}{gk^m - nv^m}$; quae expressio in seriem conuersa dat $dx = \frac{dv}{g} + \frac{nv^m dv}{g^2 k^m} + \frac{n^2 v^{2m} dv}{g^3 k^{2m}} + \text{etc.}$ Ex qua inuenitur $x = \frac{v}{g} + \frac{nv^{m+1}}{(m+1)g^2 k^m} + \frac{n^2 v^{2m+1}}{(2m+1)g^3 k^{2m}} + \frac{n^3 v^{3m+1}}{(3m+1)g^4 k^{3m}} + \text{etc.}$ Atque si ponatur tempus per AM $= dt$, quia est $dt = \frac{ndx}{\sqrt{v}}$ erit $t = \frac{2n\sqrt{v}}{g} + \frac{2n^2 v^m \sqrt{v}}{(2m+1)g^2 k^m} + \frac{2n^3 v^{2m} \sqrt{v}}{(4m+1)g^3 k^{2m}} + \frac{2n^4 v^{3m} \sqrt{v}}{(6m+1)g^4 k^{3m}} + \text{etc.}$

PROPOSITIO 56.

Problema.

Tabula XII.
Fig. 4.

489. *Resistat medium in ratione quacunque multiplicata celeritatum; datumque sit punctum A, ex quo infinitae rectae AM sint eductae: determinare curvam CMD huiusmodi, ut corpus per quamlibet rectam AM descendens in puncto M eandem habeat celeritatem.*

Solutio.

Sit $2m$ exponens potestatis celeritatis, cui resistentia est proportionalis, dicaturque $AP = x$ et $AM = z$, et ponatur $z = nx$. Sit altitudo celeritati in M debita $= v$, quae debet esse constans scilicet $= b$. Erit ergo $dx = \frac{k^m dv}{gk^m - nv^m}$

(485.) denotante, ut supra k exponentem resistentiae, et g potentiam sollicitantem deorsum tendentem. Ad naturam curvae CM ergo inveniendam oportet integrare aequationem $dx =$

$\frac{k^m dv}{gk^m - nv^m}$ ita ut posito $v = 0$ fiat quoque $x = 0$; tum autem poni b loco v atque $\frac{z}{x}$ loco n , hocque modo obtinebitur aequatio inter x et z naturam curvae exponens. Per seriem autem supra aequationem propositam integrauimus (488), vnde posito b loco v habebimus $x = \frac{b}{g} + nb$

$\frac{n b^{m+1}}{(m+1) g^2 k^m} + \frac{n^2 b^{2m+1}}{(2m+1) g^3 k^{2m}} + \text{etc.}$ Ponatur q^m loco n et multiplicetur vbique per q , quo facto habebimus $q x = \frac{b q}{g} + \frac{b^{m+1} q^{m+1}}{(m+1) g^2 k^m} +$

$\frac{b^{2m+1} q^{2m+1}}{(2m+1) g^3 k^{2m}} + \text{etc.}$ Sumantur differentia-

lia et diuidatur per $b d q$ habebitur $\frac{q dx + x dq}{b d q} = \frac{1}{g} + \frac{b^m q^m}{g^2 k^m} + \frac{b^{2m} q^{2m}}{g^3 k^{2m}} = \frac{k^m}{g k^m - b^m q^m}$, feu $q dx + x dq =$

$\frac{b k^m d q}{g k^m - b^m q^m}$. At quia est $q^m = n$ et $n = \frac{z}{x}$ po-

natur $\frac{z^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{m}}}$ loco q et prodibit $z^{\frac{m-1}{m}} x^{\frac{m-1}{m}} dz +$

$(m-1) z^{\frac{1}{m}} x^{-\frac{1}{m}} dx = \frac{b k^m z^{\frac{1-m}{m}} x^{\frac{m-1}{m}} dz - b k^m z^{\frac{1}{m}} x^{-\frac{1}{m}} dx}{g k^m x - b^m z}$

Quae multiplicata per $x^{\frac{1}{m}} z^{\frac{m-1}{m}}$ abit in hanc $x dz$

$+ (m-1) z dx = \frac{b k^m x dz - b k^m z dx}{g k^m x - b^m z}$. Constru-

ctio autem curuae facilius sequitur ex aequatio-

ne $q x = \int \frac{b k^m d q}{g k^m - b^m q^m}$. Supra autem habuimus

seriem ipsi $q x$ aequalem, ex qua patet si fuerit

$q^m = \frac{g k^m}{b^m}$, tum $\frac{g x}{b}$ aequari seriei harmonicae

$1 + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{2m+1}$ etc. ideòque esse x infinitum.
 Si igitur x est infinitum, erit $q^m = \frac{z}{x} = \frac{g k^m}{b^m}$,
 ex quo perspicitur rectam AE fore curvae asymp-
 toton et cosinum ang. CAE fore $= \frac{b^m}{g k^m}$. Ver-
 ticis autem curvae C a puncto A distantia AC
 aequalis erit huic seriei $\frac{b}{g} + \frac{b^{m+1}}{(m+1)g^2 k^m} +$
 $\frac{b^{2m+1}}{(2m+1)g^2 k^{2m}} +$ etc. Debet autem esse necessa-
 rio $b^m < g k^m$, alias enim vertex C a puncto A
 infinite distaret. Q. E. I.

Corollarium I.

490. Si applicata PM vocetur y , erit $z =$
 $V(x^2 + y^2)$ et $dz = \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, quibus valoribus in
 aequatione inuenta substitutis habebitur $xy dy +$
 $m x^2 dx + (m-1)y^2 dx = \frac{b k^m y (x dy - y dx)}{g k^m x - b^m \sqrt{x^2 + y^2}}$.

Corollarium 2.

491. Ponatur in hac aequatione $y = px$, trans-
 mutabitur ista aequatio in hanc $x p dp + m dx + m p^2 dx$
 $= \frac{b k^m p dp}{g k^m - b^m \sqrt{1 + p p}}$, quae aequatio per $(1 + p p)^{\frac{1-2m}{2m}}$

mul-

multiplicata fit integrabilis, habebitur enim

$m(1+pp)^{\frac{1}{2m}}x = \int \frac{bk^m p dp (1+pp)^{\frac{1-2m}{2m}}}{gk^m - b^m \sqrt{1+pp}}$, quae expressio per quadraturas effici potest.

Corollarium 3.

492. Si resistentia evanescat, corpusque in vacuo moueatur fit k infinitum; atque ex supra data serie inuenitur $qx = \frac{bq}{g}$ seu $x = \frac{b}{g}$, vnde cognoscitur lineam CM fieri rectam horizontalem.

Scholion I.

493. Quia autem ex hac aequatione generali parum ad cognitionem curuae potest concludi, in exemplis specialibus hanc disquisitionem ulterius prosequemur. Talia autem assumemus exempla, in quibus formula $\frac{bk^m dq}{gk^m - b^m q^m}$ integrationem saltem per logarithmos admittit, quo ad expressiones finitas perueniamus, ex quibus facile erit curuae naturam perspicere.

Exemplum I.

494. Sit igitur resistentia ipsis celeritatibus proportionalis, erit $m = \frac{1}{2}$. Ponatur AC = a ; quia celeritas, quam corpus per AC cadendo acquirit, debita esse debet altitudini b erit $a =$

Tom. II.

Ii

$2\sqrt{bk}$

$2\sqrt{b}k + 2gk \int \frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-\sqrt{b}} (486.)$. Deinde vero erit
 $\sqrt{q} = \frac{z}{x}$ seu $q = \frac{z^2}{x^2}$, atque $qx = \int \frac{bdq\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-\sqrt{b}q}$, quod in-
 tegrale ita est accipiendum vt posito $z = x$ seu
 $q = 1$ fiat $x = a$ vel eius valori assignato. Erit
 ergo $qx = -2\sqrt{b}kq + 2gk \int \frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-\sqrt{b}q}$, quae aequa-
 tio loco q substituto $\frac{z^2}{x^2}$ abit in hanc $z^2 = -2z\sqrt{b}k + 2gkx \int \frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-z\sqrt{b}}$. Si $q = 1$ fit $x = a = -$
 $2\sqrt{b}k + 2gk \int \frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-\sqrt{b}}$. Fiat autem $q = 1 + dq$
 habebitur $dx + x dq = -dq\sqrt{b}k + \frac{gkdq\sqrt{b}}{g\sqrt{k}-\sqrt{b}} = \frac{4dq\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-\sqrt{b}}$.
 At quia $\frac{1}{\sqrt{q}}$ est cosinus anguli MAC erit $\sqrt{dq} =$
 sinui huius anguli. Quamobrem incrementum
 ipsius x infinities minus est, quam incrementum
 anguli MAC, incidente MA in CA, ex quo se-
 quitur tangentem curvae in C esse horizontalem:
 huiusque curvae tangens in infinito seu asymtota
 erit AE existente ang. EAC cosinu $\frac{\sqrt{b}}{g\sqrt{k}}$. Cete-
 rum haec curua ex altera verticalis AC parte
 arcum habebit similem et aequalem ipsi CMD.

Scholion 2.

495. Generaliter quidem etiam ostendi pot-
 est curvae tangentem in C esse debere horizon-
 talem. Posita enim $n=1$, in serie x exprimen-

$$\text{te habetur } AC = \frac{b}{g} + \frac{b^{m+1}}{(m+1)g^2k^m} + \text{etc. au-} \\
 \text{geatur } n \text{ elemento } dn \text{ habebitur incrementum mo-} \\
 \text{mentaneum ipsius } AC = \frac{b^{m+1}dn}{(m+1)g^2k^m} +$$

$\frac{2b^{2m+1}dn}{(m+1)g^2k^{2m}} + \text{etc.}$ Est vero $\frac{1}{n}$ cosinus anguli MAC, ideoque sinus $= \frac{\sqrt{(n^2-1)}}{n} = \sqrt{2dn}$ posito $1+dn$ loco n . Quamobrem incrementum ipsius AC infinites est minus quam incrementum anguli; atque ideo AC normalis erit in curuam DMC.

Exemplum 2.

496. Sit resistentia quadratis celeritatum proportionalis erit $m=1$; positoque $AC=a$ erit $a=k l \frac{gk}{gk-b}$, atque $b=gk(1-e^{\frac{-a}{k}})$. Deinde vero est $q=n=\frac{z}{x}$, atque $qx=z=\int \frac{bk dq}{gk-bq} = k l \frac{gk}{gk-bq} = k l \frac{gkx}{gkx-bz}$. Habebitur ergo $e^{\frac{z}{k}} = \frac{gkx}{gkx-bz}$, vnde sequitur $x = \frac{e^{\frac{z}{k}}bz}{gk(e^{\frac{z}{k}}-1)} = \frac{e^{\frac{z}{k}}z(e^{\frac{a}{k}}-1)}{\frac{a}{e^{\frac{a}{k}}}z(e^{\frac{z}{k}}-1)}$ posito loco b eius valore in a . Ad curuam autem construendam commodissime adhibetur haec aequatio $z=k l \frac{gk}{gk-bq}$, in qua z est AM et q est fecans anguli MAC.

Scholion 3.

497. In solutione problematis ad inueniendam aequationem curuae CMD vsi fuimus seriei cuiusdam summatione; eandem vero aequationem

li 2

sine

sine seriebus sequente modo elicere licet. Quia

est $x = \int \frac{k^m dv}{gk^m - nv^m}$, haecque ipsa aequatio exprimit naturam curvae quaesitae, si post integrationem ponatur $v=b$ et $\frac{z}{x}$ loco n . Quamobrem si

$\int \frac{k^m dv}{gk^m - nv^m}$ differentietur posito non solum v sed etiam n variabili, atque tum ponatur v constans $=b$ et $\frac{z}{x}$ loco n habebitur aequatio differentialis pro curua quaesita. Ad hoc efficiendum pono $n = \frac{1}{p^m}$, quo prodeat $x = \int \frac{k^m p^m dv}{gk^m p^m - v^m}$.

Ponamus brevitatis gratia $\frac{k^m p^m}{gk^m p^m - v^m} = P$, sitque

aequatio differentialis haec $dx = Pdv + Qdp$, si etiam p variabilis accipiatur. Quia autem P est functio nullius dimensionis ipsarum v et p erit $x = Pv + Qp$, ideoque $Q = \frac{x}{p} - \frac{Pv}{p}$. Hoc igitur loco Q valore substituto prodibit $pdx =$

$$\frac{k^m p^{m+1} dv - k^m p^m v dp}{gk^m - nv^m} + xdp. \text{ Restituatur } n^{\frac{-1}{m}} \text{ loco}$$

$$p, \text{ et orietur } mndx + xdn = \frac{mk^m ndv + k^m v dn}{gk^m - nv^m},$$

in qua aequatione n aequae variabilis est assumpta ac v et x . Nunc ponatur $v=b$, $dv=0$ et $n=\frac{z}{x}$ atque habebitur ista aequatio: $x dz + (m-1)z dx =$

$b k$

$\frac{b k^m (x dz - z dx)}{g k^m x - b^m z}$, quae cum aequatione supra inuenta congruit.

PROPOSITIO 57.

Problema.

498. Si resistentia fuerit in quacunque multiplicata ratione celeritatum; inuenire curuam A M C huius proprietatis, vt corpus descendens super quavis subtenſa A M dato tempore ex A ad M perueniat.

Tabula XII.

Fig. 5.

Solutio.

Ducta verticali AC ponatur AP=x, AM=z; ſitque $n = \frac{z}{x}$. Poſita altitudine celeritati in M de-

bita = v et reſiſtentia = $\frac{v^m}{k^m}$ ſit tempus quo cor-

pus per AM descendit = t, quod debet eſſe quan-

titas conſtans. Habebimus ergo ex praecedenti-

bus $x = \int \frac{k^m dv}{g k^m - n v^m}$ et $t = \int \frac{n k^m dv}{(g k^m - n v^m) \sqrt{v}}$ (385.).

Quocirca ad naturam curuae AMC inueniendam, opus eſt vt vtraque aequatio, ſi fieri poteſt, re ipſa integretur, et valor ipſius v ex altera aequatione in altera ſubſtituatur, atque tam loco n ſcribatur $\frac{z}{x}$, quo facto habebitur aequatio inter

li 3

x et z

x et z naturam curvae quaesitae exprimens. At si integrationes non commode perfici poterunt, vtraque aequatio est differentianda ponendo quoque n variabili; et postquam positum est $dt=0$, ex duabus aequationibus inuentis eliminari debet v , quo prodeat aequatio n et x tantum continens, quae ob $n = \frac{z}{x}$ exhibebit naturam curvae

quaesitae. Ad hoc ponatur $n = \frac{1}{p^m}$, quo ha-

beamus $x = \int \frac{k^m p^m dv}{g k^m p^m - v^m}$ et $t = \int \frac{k^m dv}{(g k^m p^m - v^m) \sqrt{v}}$.

Quarum aequationum illius sumto quoque p variabili differentialis iam est inuenta $p dx - x dp = \frac{k^m p^{m+1} dv - k^m p^m v dp}{g k^m p^m - v^m}$ (497.). Ad alteram aequa-

tionem differentiandam pono $\frac{k^m}{(g k^m p^m - v^m) \sqrt{v}} = P$,

fitque $dt = P dv + Q dp$. Quia autem P est functio ipsarum v et p dimensionum $-m - \frac{1}{2}$ erit $(\frac{1}{2} - m) t = P v = + Q p$, atque hinc $Q = \frac{(\frac{1}{2} - 2m)t}{2p} - \frac{Pv}{p}$. Quo valore loco Q substituto prodibit $p dt =$

$\frac{k^m (p dv - v dp)}{(g k^m p^m - v^m) \sqrt{v}} + \frac{(1 - 2m)t dp}{2}$. Sit nunc $t =$

$\frac{2}{2} \sqrt{c}$ atque $dt=0$, habebimus $(2m - 1) dp \sqrt{c} = \frac{k^m (p dv - v dp)}{(g k^m p^m - v^m) \sqrt{v}}$. Eliminetur ex his duabus

aequationibus dv et proueniet $p dx - x dp = (2m - 1) \frac{p^m}{p^m}$

$$p^m dp \sqrt{c} v \text{ seu } \sqrt{v} = \frac{p dx - x dp}{(2m-1)p^m dp \sqrt{c}} \quad =====$$

$$\frac{dr}{(2m-1)p^{m-2} dp \sqrt{c}} \text{ posito } x = rp. \text{ Substituatur hic}$$

$$\text{valor loco } v \text{ in aequatione } (2m-1) dp \sqrt{c} ==$$

$$\frac{k^m (p dv - v dp)}{(g k^m p^m - v^m) \sqrt{v}} \text{ vel in hac } \frac{dr}{p^{m-2}} = \frac{k^m (p dv - v dp)}{g k^m p^m - v^m}$$

Casu quidem quo $m = \frac{1}{2}$ seu resistantia celeritatus proportionalis erit $p dv = v dp$ seu $v = \alpha p$ et $p = b = x = \frac{1}{n^2} = \frac{xx}{zz}$, vnde sequitur fore $zz = ax$; quamobrem in hac resistantiae hypothefi curua AMC est circulus omnino vt in vacuo. In aliis hypothefibus nisi re ipsa aequatio alterutra integretur eliminata v habebitur aequatio differentio-differentialis inter z et x naturam curuae exprimens. Q. E. I.

Corollarium I.

499. Si ponatur $v = up$, erit $p dv - v dp = pp du$

$$\text{Atque hinc erit } \sqrt{u} = \frac{dr}{(2m-1)p^{m-\frac{3}{2}} dp \sqrt{c}}, \text{ qui valor}$$

$$\text{substitutus in aequatione } dr = \frac{k^m du}{g k^m - u^m} \text{ dabit ae-}$$

quationem inter p et r , ex qua aequatio inter x et z formabitur.

Co-

Corollarium 2.

500. In medio ergo quod resistit in simplici celeritatum ratione apparet curuam AMC esse circulum. Atque ideo in hac resistantiae hypothesi tempora descensuum per singulas circuli chordas ex puncto A ductas sunt inter se aequalia.

Exemplum I.

501. Sit resistantia quadratis celeritatum proportionalis erit $m=1$, atque $x = \frac{k}{n} l \frac{gk}{gk-nv}$ seu $v = \frac{gk}{n} (1 - e^{-\frac{nx}{k}})$. Praeterea vero erit $t=2\sqrt{c} = \frac{nk}{\sqrt{g}} l \frac{\sqrt{gk+nv}}{\sqrt{gk-nv}}$ seu $e^{\frac{2\sqrt{gc}}{\sqrt{nk}}} = \frac{\sqrt{gk+nv}}{\sqrt{gk-nv}}$, vnde fit $v = \frac{gk(e^{\frac{2\sqrt{gc}}{\sqrt{nk}}} - 1)}{\frac{2\sqrt{gc}}{\sqrt{nk}} + 1}$. Eliminata ergo v et $\frac{z}{x}$ posito lo-

$$\text{co } n \text{ habebitur } \frac{e^{\frac{z}{k}} - 1}{\frac{z}{e^k}} = \frac{(e^{\frac{2\sqrt{gc}x}{\sqrt{kz}}} - 1)^2}{(e^{\frac{2\sqrt{gc}x}{\sqrt{kz}}} + 1)} \text{ seu } \frac{2\sqrt{gc}x}{\sqrt{kz}}$$

$$= l \frac{1 + \sqrt{1 - e^{-\frac{z}{k}}}}{1 - \sqrt{1 - e^{-\frac{z}{k}}}}. \text{ In hac curua est } AC = k$$

$$l \frac{(e^{\frac{2\sqrt{gc}}{\sqrt{k}}} + 1)^2}{4e^{\frac{2\sqrt{gc}}{\sqrt{k}}}} = k l \frac{e^{\frac{\sqrt{gc}}{\sqrt{k}}} + e^{-\frac{\sqrt{gc}}{\sqrt{k}}}}{2}, \text{ si igitur ponatur}$$

AC

$AC=a$, erit $2e^{\frac{a}{2k}} = e^{\frac{\sqrt{gc}}{\sqrt{k}}} + e^{\frac{-\sqrt{gc}}{\sqrt{k}}}$: vnde erit
 $e^{\frac{\sqrt{gc}}{\sqrt{k}}} = e^{\frac{a}{2k}} + \sqrt{e^{\frac{a}{k}} - 1}$, seu $\sqrt{\frac{gc}{k}} = l(e^{\frac{a}{2k}} + \sqrt{e^{\frac{a}{k}} - 1})$
 $- 1$). Erit igitur $\sqrt{x} l(e^{\frac{a}{2k}} + \sqrt{e^{\frac{a}{k}} - 1}) =$
 $\sqrt{z} l(e^{\frac{a}{2k}} + \sqrt{e^{\frac{z}{k}} - 1})$ aequatio pro curua AMC.
 Si resistentia fuerit valde parua, erit k quan-
 titas vehementer magna, atque ideo $e^{\frac{z}{k}} + \sqrt{e^{\frac{z}{k}} - 1} = 1 + \frac{z}{2k} + \sqrt{\frac{z}{k} + \frac{z^2}{2k^2}} = 1 + \sqrt{\frac{z}{k}}$
 $+ \frac{z}{2k} + \frac{z\sqrt{z}}{4k\sqrt{k}}$ huiusque logarithmus erit $= \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{k}} +$
 $\frac{z\sqrt{z}}{12k\sqrt{k}}$. Simili modo erit $l(e^{\frac{a}{2k}} + \sqrt{e^{\frac{a}{k}} - 1}) =$
 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{k}} + \frac{a\sqrt{a}}{12k\sqrt{k}}$. Atque hanc ob rem habebitur pro
 curua AMC haec aequatio $\sqrt{ax} + \frac{a\sqrt{ax}}{12k} = z +$
 $\frac{z^2}{12k}$ seu $ax(1 + \frac{a}{6k} + \frac{a^2}{144k^2}) = z^2 + \frac{z^3}{6k} + \frac{z^4}{144k^2}$
 Vnde perspicitur si resistentia prorsus euanescat
 seu k fiat infinite magnum fore $ax = z^2$ atque
 ideo curuam AMC circulum. At si medium ra-
 rissimum fuerit, erit $ax(a + 6k) = 6kz^2 + z^3$,
 et differentiando $adx(a + 6k) = 12kzdz + 3z^2$
 dz . Si nunc fiat $zdz = xdx$ habebitur applicata
 PM maxima, seu locus vbi tangens curuae est
 verticalis, scilicet $a^2 + 6ak = 12kx + 3xz$ seu
 $x = \frac{a^2 + 6ak}{12k + 3z}$, vnde fit $\frac{(6ak + a^2)^2}{3} = 24k^2z^2 + 10$
 $kz^3 + z^4$, ex qua aequatione ipsius z valor quam
 proxime est $\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{(4\sqrt{2}-5)a^2}{48k}$, atque $x = \frac{a}{2}$

$\frac{(3\sqrt{2}-4)a^2}{48k}$ et $PM = \frac{a}{2} + \frac{(2-\sqrt{2})a^2}{24k}$. Curua ergo latissima est supra medietatem, ibique latior est quam altitudo AC.

Corollarium 3.

502. Si igitur linea recta vel curua hanc curuam AMC in M tangat, ita vt tota extra spatium AMC sit sita, corpus ex A ad eam lineam citius perueniet descendendo super chorda AM, quam super quauis alia recta ex A ad eam lineam ducta.

Exemplum 2.

503. Sit m numerus affirmatiuus et resistentia valde parua, erit k quantitas vehementer magna, atque hinc

$$\frac{k^m}{gk^m - nv^m} = \frac{1}{g} + \frac{nv^m}{g^2k^m}. \text{ Quo-}$$

$$\text{circa erit } x = \frac{v}{g} + \frac{nv^{m+1}}{(m+1)g^2k^m} \text{ atque } t = 2\sqrt{c}$$

$$= \frac{2n\sqrt{v}}{g} + \frac{2n^2v^{m+\frac{1}{2}}}{(2m+1)g^2k^m}; \text{ hincque prodit } v$$

$$= gx - \frac{ng^m x^{m+1}}{(m+1)k^m}, \text{ et } \sqrt{v} = \sqrt{gx} - \frac{ng^{m-\frac{1}{2}} x^{m+\frac{1}{2}}}{2(m+\frac{1}{2})k^m}$$

$$\text{atque } v^{m+\frac{1}{2}} = g^{m+\frac{1}{2}} x^{m+\frac{1}{2}} - \frac{n(2m+1)g^{2m-\frac{1}{2}} x^{2m+\frac{1}{2}}}{2(m+\frac{1}{2})k^m}$$

His autem valoribus substitutis prodit ista aequa-

rio

$$\text{tio } \frac{Vgc}{Vx} = n + \frac{n^2 g^{m-1} x^m}{(2m+1)(2m+2)k^m} - \frac{n^3 g^{2m-2} x^{2m}}{(2m+2)k^{2m}}.$$

Quia vero est $n = \frac{z}{x}$, habebitur ista aequatio Vg

$$cx = z + \frac{g^{m-1} x^{m-1} z^2}{(2m+1)(2m+2)k^m} - \frac{g^{2m-2} x^{2m-2} z^3}{(2m+2)k^{2m}}$$

$$\text{feu } gcx = z^2 + \frac{g^{m-1} x^{m-1} z^3}{(m+1)(2m+1)k^m} \text{ si medium est}$$

rarissimum. Vnde patet si resistentia penitus evanescat fore $z^2 = gcx$ feu curuam AMC circum diametri AC .

Scholion.

504. Si igitur cognita fuerit curua AMC , et detur linea quaecunque determinari poterit recta AM super qua corpus ex A celerrime ad datam lineam pertingat. Scilicet construenda est curua AMC , quae datam lineam tangat v. g. in M ; eritque recta AM ea recta super qua corpus descendendo ex A citissime ad lineam datam perveniat. Atque simili modo in praecedente problemate si recta vel curua tangat curuam CMD in M , corpus ex A descendendo per AM vsque ad lineam tangentem curuam CMD maiorem acquireret celeritatem, quam descendendo super quavis alia recta ex A ad eam lineam ducta. Ex his igitur solui possunt problemata, quibus requiritur recta ex A ad datam lineam ducta, super qua corpus descendendo vel maximam acqui-

Tabula XII.
Fig. 4.

rat celeritatem, vel citissime ad eam lineam per-
tingat. Quamobrem hisce problematibus non diu-
tius immorabimur, sed ad ascensum super lineis
rectis considerandum progrediemur.

PROPOSITIO 58.

Problema.

Tabula XII.
Fig. 6.

505. In hypothefi grauitatis vniformis g et me-
dio quocunque resistente vniformi determinare motum
corporis data cum celeritate initiali ex A ascenden-
tis super linea recta AB vtcunque inclinata ad ho-
rizontem.

Solutio.

Ducta horizontali AC et ex M ad eam per-
pendiculari MP vocetur $PM = x$, fitque $AM = nx$.
Sit altitudo debita celeritati initiali in $A = b$, et al-
titudo debita celeritati initiali in $M = v$; resisten-
tia vero in M fit $= \frac{v}{K}$. His positis erit $dv = -$
 $gdx - \frac{nVdx}{K}$ (475.), vnde habetur $dx = \frac{-Kdv}{gK + nV}$ atque
 $x = \int \frac{-Kdv}{gK + nV}$ hoc integrali ita accepto vt euane-
scat posito $v = b$. Si deinde ponatur $v = 0$, pro-
dibit $x = BC$, vbi in puncto B corpus omnem ce-
leritatem amittit. Tempus vero, quo corpus per
 AM ascendit est $= \int \frac{-nKdv}{(gK + nV)\sqrt{v}}$ hoc integrali quoque
ita accepto, vt euaneſcat posito $v = b$, in quo
fi

si porro ponatur $v=0$, prodibit tempus totius ascensus per AMB. Pressio autem, quam linea AMB sustinet, vbique est constans et aequalis vi normali $= \frac{g\sqrt{(n^2-1)}}{n}$. Q. E. I.

Corollarium I.

506. Si linea AMB fit horizontalis euanescente angulo BAC fiet $n=\infty$. Posito igitur $AM=z=nx$, erit $z=\int \frac{Kdv}{v}$, et tempus quo per AM progreditur erit $=\int \frac{Kdv}{v\sqrt{v}}$.

Corollarium 2.

507. Si resistentia fuerit vt potestas exponentis $2m$ celeritatum erit $V=v^m$ et $K=k^m$.

Hoc ergo casu erit $x=\int \frac{-k^m dv}{gk^m + nv^m}$, atque tempus per AM $=\int \frac{-nk^m dv}{(gk^m + nv^m)\sqrt{v}}$.

Corollarium 3.

508. Vtraque haec expressio in seriem con-

$$\begin{aligned} \text{uerfa dat } x &= \frac{b-v}{g} - \frac{n(b^{m+1}-v^{m+1})}{(m+1)g^2 k^m} + \\ & \frac{n^2(b^{2m+1}-v^{2m+1})}{(2m+1)g^3 k^{2m}} - \text{etc. Atque tempus per AM} = \\ & \frac{2n(\sqrt{b}-\sqrt{v})}{g} - \frac{2n^2(b^{\frac{m+1}{2}}-v^{\frac{m+1}{2}})}{(2m+1)g^2 k^m} + \\ & \text{K k 3} \end{aligned}$$

$$\frac{2n^3(b^{2m+\frac{1}{2}} - v^{2m+\frac{1}{2}})}{(4m+1)g^3k^{2m}} - \text{etc.} \quad \text{Quamobrem posito}$$

$$v=0 \text{ erit } BC = \frac{b}{g} - \frac{nb^{m+1}}{(m+1)g^2k^m} + \frac{n^2b^{2m+1}}{(2m+1)g^3k^{2m}} \\ - \text{etc. atque tempus totius ascensus per AB} = \\ \frac{2n\sqrt{b}}{g} - \frac{2n^2b^{m+\frac{1}{2}}}{(2m+1)g^2k^m} + \frac{2n^3b^{2m+\frac{1}{2}}}{(4m+1)g^3k^{2m}} - \text{etc.}$$

Exemplum I.

509. Sit resistentia celeritatibus proportionalis, erit $m = \frac{1}{2}$, atque $x = \int \frac{-dv\sqrt{k}}{g\sqrt{k} + n\sqrt{v}} = \frac{2\sqrt{bk}}{n} - \frac{2\sqrt{kv}}{n} + \frac{2gk}{n^2} \int \frac{g\sqrt{k} + n\sqrt{v}}{g\sqrt{k} + n\sqrt{v}}.$ Hinc erit tota altitudo

BC ad quam corpus pertingere valet $= \frac{2\sqrt{bk}}{n} - \frac{2gk}{n^2} \int \frac{g\sqrt{k} + n\sqrt{b}}{g\sqrt{k}}.$ Tempus vero, quo per AM ascendit est $= \int \frac{-ndv\sqrt{k}}{(g\sqrt{k} + n\sqrt{v})\sqrt{v}} = 2\sqrt{k} \int \frac{g\sqrt{k} + n\sqrt{b}}{g\sqrt{k} + n\sqrt{v}}.$ Quare

Tabula XII.
Fig 7.

tempus totius ascensus per AMB erit $= 2\sqrt{k} \int \frac{g\sqrt{k} + n\sqrt{b}}{g\sqrt{k}}.$ Si igitur corpus super linea inclinata AC descenderit et celeritate in C acquisita ascendat in CB vsque ad B; fitque AC=N. AD et BC=n. BE atque celeritas in C debita altitudini b; erit AD $= -\frac{2\sqrt{bk}}{N} + \frac{2gk}{N^2} \int \frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - N\sqrt{b}};$ AC $= -2\sqrt{bk} + \frac{2gk}{N} \int \frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - N\sqrt{b}} (486);$ BE $= \frac{2\sqrt{bk}}{n} - \frac{2gk}{n^2} \int \frac{g\sqrt{k} + n\sqrt{b}}{g\sqrt{k}};$ CB $= 2\sqrt{bk} - \frac{2gk}{n} \int \frac{g\sqrt{k} + n\sqrt{b}}{g\sqrt{k}}.$ Atque tempus descensus per AC $= 2\sqrt{k} \int \frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - N\sqrt{b}} (\text{cit.})$ et tempus ascensus per CB $= 2\sqrt{k} \int \frac{g\sqrt{k} + n\sqrt{b}}{g\sqrt{k}}. Vn-$

de

de descensus et ascensus super lineis rectis inter se comparari possunt.

Corollarium 4.

510. Si hi logarithmi per series exprimantur, patet fieri non posse, vt sit $BE=AD$, est enim in quacunque resistantiae hypothesi, vt ex seriebus (508. et 488.) intelligitur, $BE <_g^b$ et $AD >_g^b$. Fieri autem potest vt sit $AC=BC$.

Corollarium 5.

511. Effici autem facile potest vt tempus descensus per AC aequale sit tempori ascensus per CB. Fieri scilicet debet $ng\sqrt{k}=Ng\sqrt{k}+Nn\sqrt{b}$, seu $n=\frac{Ng\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-N\sqrt{b}}$. Est igitur $n > N$ seu ang. BCE $<$ ang. ACD. Relatio autem inter N et n pendet a celeritate in puncto C.

Corollarium 6.

512. Si autem angulus BCE aequalis fuerit angulo ACD, seu $N=n$ tempus ascensus per BC minus erit tempore descensus per AC. Atque hoc generaliter locum habet in quacunque resistantiae hypothesi; est enim tempus descensus per AC $> \frac{2n\sqrt{b}}{g}$ et tempus ascensus per CB $< \frac{2n\sqrt{b}}{g}$, vt ex seriebus supra datis (488. et 508.) apparet.

Exem-

Exemplum 2.

Tabula XII.
Fig. 6.

513. Resistat medium in duplicata ratione celeritatum, erit $m=1$. Quare habebitur $x = \int \frac{-kdv}{gk+nv} = \frac{k}{n} \int \frac{gk+nb}{gk+nv}$ atque $BC = \frac{k}{n} \int \frac{gk+nb}{gk}$, et $AB = k \int \frac{gk+nb}{gk}$ Tempus vero ascensus AM erit $= \int \frac{-nkdv}{(gk+nv)\sqrt{v}} = \frac{2\sqrt{kn}}{\sqrt{g}} (A. \text{tang. } \sqrt{\frac{nb}{gk}} - A. \text{tang. } \sqrt{\frac{nv}{gk}})$ existente radio $= 1$, et A denotante arcum circuli. Erit

Tabula XII.
Fig. 7.

ergo tempus ascensus per AB $= \frac{2\sqrt{kn}}{\sqrt{g}} A. \text{tang. } \sqrt{\frac{nb}{gk}}$ Si nunc corpus super linea inclinata AC descenderit, et celeritate in C acquisita, quae debita sit altitudini b rursus ascendat per CB, fueritque $AC=N. AD$ et $BC=n. BE$, erit $AD = \frac{k}{N} \int \frac{gk}{gk-Nb}$ et $AC = k \int \frac{gk}{gk-Nb}$, atque tempus descensus per AC $= \frac{\sqrt{Nk}}{\sqrt{g}} \int \frac{\sqrt{gk+nb}}{\sqrt{gk-Nb}} (487.)$. Porro vero erit $BE = \frac{k}{n} \int \frac{gk+nb}{gk}$; $BC = k \int \frac{gk+nb}{gk}$ et tempus ascensus per CB $= \frac{2\sqrt{nk}}{\sqrt{g}} A. \text{tang. } \sqrt{\frac{nb}{gk}}$.

Corollarium 7.

514. In hac resistantiae hypothese commode effici potest, ut sit $AC=BC$: debet enim esse $ngk=Ngk+Nnb$, seu $n=\frac{Ngk}{gk-Nb}$. Est igitur $n > N$ hincque ang. $BCE < ACD$.

Exemplum 3.

515. Sit resistantia quam minima et proportionalis potestati $2m$ celeritatum, erit k quantitas vehemen-

vehementer magna. Si ergo celeritas in C fuerit debita altitudini b et $AC = N$. AD atque $BC = n$. BE, corpusque super AC descendat et super CB ascendant; erit $AD =$

$$\frac{b}{g} + \frac{N b^{m+1}}{(m+1)g^2 k^m}; \text{ et tempus descensus per AC} = \frac{2N\sqrt{b}}{g} + \frac{2N^2 b^m \sqrt{b}}{(2m+1)g^2 k^m} (488). \text{ Pro ascensu ve-}$$

$$\text{ro erit BE} = \frac{b}{g} - \frac{n b^{m+1}}{(m+1)g^2 k^m} \text{ et tempus per}$$

$$CB = \frac{2n\sqrt{b}}{g} - \frac{2n^2 b^m \sqrt{b}}{(2m+1)g^2 k^m} (508). \text{ Si igitur effici}$$

debeat ut sit $AC = BC$, oportet esse $N +$

$$\frac{N^2 b^m}{(m+1)g k^m} = n - \frac{n^2 b^m}{(m+1)g k^m}, \text{ unde fit } n = N +$$

$$\frac{2N^2 b^m}{(m+1)g k^m}, \text{ propter quantitatem } k \text{ valde ma-}$$

gnam. At quo tempus descensus per AC aequale sit tempori ascensus per CB, debet esse $N +$

$$\frac{N^2 b^m}{(2m+1)g k^m} = n - \frac{n^2 b^m}{(2m+1)g k^m}, \text{ seu } n = N +$$

$$\frac{2N^2 b^m}{(2m+1)g k^m}.$$

Scholion I.

516. In casu huius exempli, quo resistentia est valde parua, curua AMD potest determinari

Tom. II.

LI

huius

Tabula XII.
Fig. 8.

huius proprietatis, vt corpus ex C celeritate altitudini b debita ascendendo super quavis recta CM ad curuam AMD pertingat. Posita enim $CM=z$, et $MP=x$, erit $n=\frac{z}{x}$ atque $x=\frac{b}{g}-$

$\frac{nb^{m+1}}{(m+1)g^2k^m}$. Quare habebitur ista aequatio b^{m+1}

$z=(m+1)gbk^mx-(m+1)g^2k^mx^2$. Sit $CP=y$

et loco $\frac{b^{m+1}}{(m+1)gk^m}$ scribatur f oriatur $f\sqrt{(x^2+y^2)}$

$=bx-gx^2$ seu $ffyy=(bb-ff)xx-2gbx^3+g^2$

x^4 . Si ponatur $y=0$, erit et $x=0$ et $x=\frac{b-f}{g}$

$=CA$. Curua ergo etiam per punctum C transit,

quae autem eius pars quaestioni satisfacere

cessat, propter sequentes terminos neglectos,

qui perperam negliguntur si n seu $\frac{z}{x}$ fit quoque

valde magnum. Aequatio vero dat curuam ellip-

siformem maxime oblongam circa axem mi-

norem AC descriptam. Vera autem curua habet

formam AMD, cuius asymptotos est horizontalis CE,

si quidem est $m>1$, eiusque aequatio habetur

omnibus sumendis terminis, quae erit $x dz +$

$(m-1)z dx = \frac{bk^m(z dx - x dz)}{gk^m x + b^m z}$. Si $m < 1$ curua

non in infinitum progredietur, sed incidet in CE

sumendo $CE=\frac{bk^m}{(1-m)b^m}$. Nam si $m < 1$ corpus

horizontaliter non in infinitum progredi potest, sed

in distantia finita omnem amittit celeritatem.

Scho-

Scholion 2.

517. Si medium resistens non sit vniforme; tum linea non esset recta, super qua motus facillime determinari posset: idem quoque est notandum si potentia sollicitans non fuerit vniformis. Vt sit potentia sollicitans $= P$ et resistentia $= \frac{v}{Q}$, vbi Q talis est functio exponentis resistentiae variabilis q , qualis V est ipsius v : His positis motus corporis super quacunque curua exprimitur hac aequatione $dv = \pm Pdx \pm \frac{vds}{Q}$. Eius ergo curuae, super qua motus facillime definitur, haec erit aequatio $PQdx = A ds$, ex qua oritur sequens $\frac{A dv}{\pm A \pm v} = Pdx$, motum super hac curua determinans, in qua indeterminatae sunt a se inuicem separatae. Quare si etiam huiusmodi hypotheses persequi vellemus, loco linearum rectarum huiusmodi curuas hac aequatione expressas $PQdx = A ds$ assumere deberemus. Sed quia statuimus hypothesin potentiae sollicitantis et resistentiae vniformis tantum fusius pertractare, missis his ad eos casus progredimur, in quibus v vnica tantum habet dimensionem, id quod euenit, si resistentia proportionalis fuerit quadratis celeritatum.

PROPOSITIO 59.

Problema.

518. In hypothesi grauitatis vniformis g , et resistentiae quadratis celeritatum proportionalis descen-

L1 2

dat

Tabula XII.

Fig. I.

dat corpus super curua quacunque AMB; determinare eius motum et pressionem, quam curua in singulis punctis sustinet.

Solutio.

In axe verticali sumatur abscissa $AP = x$ et ponatur arcus $AM = s$, celeritas in M debita altitudini v et exponens resistentiae k , erit resistentia $= \frac{v}{k}$. Quamobrem ista habebitur aequatio motum corporis exponens $dv = g dx - \frac{v ds}{k}$ (465). Ad hanc integrandam multiplico per $e^{\frac{s}{k}}$ eritque integralis $e^{\frac{s}{k}} v = \int e^{\frac{s}{k}} g dx$. Ita autem sumi debet hoc integrale, ut posito $s = 0$, abeat v in altitudinem celeritati initiali in A debitam. Si igitur descensus ex quiete fieri ponatur, $e^{\frac{s}{k}} g dx$ ita debet integrari ut euanescat posito $s = 0$. Hoc itaque facto erit $v = g e^{-\frac{s}{k}} \int e^{\frac{s}{k}} dx$. Vnde tempus

$$\text{per AM erit} = \int \frac{e^{-\frac{s}{k}} ds}{\sqrt{g \int e^{\frac{s}{k}} dx}}. \text{ Posito nunc PM} = y$$

sumtoque dx constante, erit pressio, quam curua in M secundum normalem MN sustinet $= \frac{g dy}{ds} + \frac{2 g e^{-\frac{s}{k}} dx ddy \int e^{\frac{s}{k}} dx}{ds^3}$. Q. E. I.

Corollarium I.

519. Pressio, quam curua sustinet in hanc formam potest transmutari $\frac{g ds}{e^{\frac{s}{k}} dy dx}$ d. $\frac{dy^2}{ds^2} \int e^{\frac{s}{k}}$ dx , quae, postquam pro data curua integratum est $e^{\frac{s}{k}} dx$, commodius ad quosuis casus accommodatur.

Corollarium 2.

520. Corpus in descensu maximam habet celeritatem, vbi est $v = \frac{g k dx}{ds}$. Hoc vero euenit vbi est $e^{\frac{s}{k}} k dx = ds \int e^{\frac{s}{k}} dx$, seu vbi d. $\int e^{\frac{s}{k}} dx = \frac{ds}{k}$, in quo puncto patet tangentem non esse horizontalem.

Corollarium 3.

521. Si fuerit $\int e^{\frac{s}{k}} dx = \frac{e^{\frac{s}{k}} s^n}{a^{n-1}}$, erit $dx = \frac{n s^{n-1} ds}{a^{n-1}}$ $+ \frac{s^n ds}{a^{n-1} k}$ atque $x = \frac{s^n}{a^{n-1}} + \frac{s^{n+1}}{(n+1) a^{n-1} k}$. Quare si haec aequatio exprimat curuae quaesitae naturam, erit $v = \frac{g s^n}{a^{n-1}}$ et tempus per A M = $\frac{2 a^{\frac{n-1}{2}} s^{\frac{2-n}{2}}}{(2-n) \sqrt{g}}$ si quidem n fuerit minor binario;

nam si $n=2$ vel $n>2$, curua in A tangentem horizontalem habebit, atque corpus ibi perpetuo permanebit.

Corollarium 4.

522. Simili modo etiam perspicitur, si x fuerit potestas quaecunque ipsius s vel huiusmodi potestatum aggregatum, semper integrari posse $e^{\frac{s}{k}} dx$ atque ideo celeritatem terminis finitis exhiberi.

Corollarium 5.

523. Si autem abscissae in axe verticali BQ sumantur et celeritas, quam corpus in B habebit debita sit altitudini b ; praetereaue vocetur BQ $=x$ et BM $=s$, erit $dv = -g dx + \frac{v ds}{k}$, cuius integralis est $e^{\frac{-s}{k}} v = b - g \int e^{\frac{-s}{k}} dx$ integrali scilicet $\int e^{\frac{-s}{k}} dx$ ita accepto vt euanescat posito $x=0$.

Hanc ob rem erit $v = b e^{\frac{s}{k}} - g e^{\frac{s}{k}} \int e^{\frac{-s}{k}} dx$, et tempus, quo in descensu arcus MB absoluitur $=$

$$\int \frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}} \sqrt{(b - g \int e^{\frac{-s}{k}} dx)^2}}$$

Corollarium 6.

524. Si igitur detur celeritas in puncto B nempe \sqrt{b} , inueniri potest in curua BMA punctum A, ex quo descendere incepit, vbique celeritatem ha-

habuit $= 0$. Quaeri debet scilicet locus, vbi est
 $\int e^{-\frac{s}{k}} dx = \frac{b}{g}$. Atque etiam expressio temporis
 $\int \frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}} \sqrt{(b - g \int e^{-\frac{s}{k}} dx)}}$ dabit tempus totius descensus
 per AMB, si post integrationem ponatur $\int e^{-\frac{s}{k}} dx = \frac{b}{g}$.

Scholion.

525. Duplicem hic motum inuestigandi modum ideo attulimus, vt tam ad descensus ex dato puncto factos, quam ad descensus vsque ad datum punctum, vt in motu oscillatorio fieri solet, accommodari possit.

PROPOSITIO 60.

Problema.

526. *Existente potentia sollicitante uniformi et medio uniformi resistente in duplicata ratione celeritatum; determinare motum corporis ascendens super data curua AMD, et pressionem quam curua sustinet in singulis punctis M.*

Tabula XII.
Fig. 2.

Solutio.

In linea verticali AP ponatur abscissa $AP = x$, arcus $AM = s$; celeritas in A debita altitudini b , et celeritas in M altitudini v . Sit potentia sollicitans deorsum $= g$ et resistentia $= \frac{v}{k}$. His positus erit $dv = -g dx - \frac{v ds}{k}$ (475.), quae multiplicata

cata per $e^{\frac{s}{k}}$ dat integrale $e^{\frac{s}{k}}v = b - g \int e^{\frac{s}{k}} dx$ ita
 sumto $\int e^{\frac{s}{k}} dx$ vt evanescat posito $x = 0$. Hanc
 ob rem erit $v = e^{-\frac{s}{k}} b - g e^{-\frac{s}{k}} \int e^{\frac{s}{k}} dx$, atque tempus
 ascensus per arcum $AM = \int \frac{e^{\frac{s}{2k}} ds}{V(b - g \int e^{\frac{s}{k}} dx)}$. Ex in-
 uenta celeritate habebitur pressio, quam curua in
 M secundum normalem MN patitur, $= \frac{g dy}{ds} -$
 $\frac{2v dx ddy}{ds^3}$ (475), posito $PM = y$ et sumto dx pro
 constante. Q. E. I.

Corollarium I.

527. Posito ergo $v = 0$, erit $g \int e^{\frac{s}{k}} dx = b$,
 ex qua aequatione obtinebitur punctum D, quous-
 que corpus ex A ascendere poterit. Atque tem-
 pus totius ascensus per AMD habebitur, si in ex-
 pressionem temporis ponatur $g \int e^{\frac{s}{k}} dx = b$.

Corollarium 2.

528. Si in formula pressionem exhibente lo-
 co v eius valor inuentus substituatur, habebitur

$$-\frac{2e^{-\frac{s}{k}} b dx ddy}{ds^3} + \frac{g dy}{ds} + \frac{2ge^{-\frac{s}{k}} dx ddy \int e^{\frac{s}{k}} dx}{ds^3}$$

Quae transmutari potest in hanc formam —

$$\frac{2e^{-\frac{s}{k}} b dx ddy}{ds^3} + \frac{g ds}{e^{\frac{s}{k}} dy dx} d. \frac{dy^2}{ds^2} \int e^{\frac{s}{k}} dx.$$

Corollarium 3.

529. Pro descensu vero, si celeritas in A debita quoque est altitudini b , pressio quam curua in M secundum normalem MN sustinet est = -

$$\frac{2e^{\frac{s}{k}} b dx ddy}{ds^3} + \frac{g e^{\frac{s}{k}} ds}{dy dx} d. \frac{dy^2}{ds^2} \int e^{-\frac{s}{k}} dx.$$

Corollarium 4.

530. Si igitur tam ascensus quam descensus respectu axis AP definiatur, aequatio ascensum determinans transmutari potest in aequationem descensus scribendo $-k$ loco k ; atque vicissim. Quare si super curua AM descensus fuerit determinatus, habebitur quoque ascensus et vicissim.

Scholion.

531. Quia formulae ascensum et descensum determinantes tantam inter se habent affinitatem, ascensus et descensus facile poterunt inter se comparari, atque ideo oscillationes super data curua determinari. Id quod in sequente propositione, quantum generaliter fieri potest, praestabimus.

Tom. II.

Mm

PRO-

PROPOSITIO 61.

Problema.

Tabula XII.
Fig. 9.

532. *Sint curvae quaecunque MA et NA in infimo puncto A coniunctae, atque corpus descendat super curua AN in medio resistente uniformi secundum quadrata celeritatum; inter se comparare descensum super curua MA et ascensum super curua AN.*

Solutio.

Sit celeritas in puncto A debita altitudini b ; atque in axe verticali AP abscissa $AP = x$, arcus $AM = s$. Pro curua ascensus AN vero sit $AQ = t$ et $AN = r$. His positis erit corporis descendens celeritas in M debita altitudini $e^{\frac{s}{k}}b - g e^{\frac{s}{k}} \int e^{\frac{-s}{k}} dx$. (523.) Corporis vero ascendentis super curua AN celeritas in N debita est altitudini $e^{\frac{-r}{k}}b - g e^{\frac{-r}{k}} \int e^{\frac{r}{k}} dt$ (526). Quare si celeritates in M et N evanescant, ita ut MAN sit arcus vna semiofcillatione descriptus erit $\frac{b}{g} = \int e^{\frac{-s}{k}} dx$ et $\frac{b}{g} = \int e^{\frac{r}{k}} dt$. Si nunc concipiatur alia semiofcillatione arcum man absoluens, in qua celeritas in puncto A debita sit altitudini $b + db$, erit $\frac{b+db}{g} = \int e^{\frac{-s}{k}} dx + e^{\frac{-s}{k}} dx$, hincque $e^{\frac{-s}{k}} dx = \frac{db}{g}$, seu $e^{\frac{-AM}{k}} Pp = \frac{db}{g}$. Similiter pro ascensu erit $e^{\frac{AN}{k}} Qq = \frac{db}{g}$. Ex quibus

bus fiet $\frac{Pp}{Qq} = e^{\frac{AM+AN}{k}}$, seu $lPp - lQq = \frac{AM+AN}{k}$.
 Dato ergo arcu MAN vna semiofcillatione de-
 scripto, si corpus in puncto proximo superiore
m descendere incipiat, inuenietur punctum *n* ad
 quod supra N pertinet: erit nempe $Qq =$

$$e^{\frac{Pp}{\frac{AM+AN}{k}}}. \quad Q. E. I.$$

Corollarium I.

533. Si igitur MAN et *mAn* fuerint duo
 arcus ofcillationibus proximis descripti, erit sem-
 per $Qq < Pp$, eoque minus erit Qq quam Pp ,
 quo maior fuerit summa arcuum $AM+AN$. Sem-
 per igitur quoque erit AQ minor quam AP.

Corollarium 2.

534. In vacuo, quia est $k=\infty$, erit $e^{\frac{AM+AN}{k}} = 1$;
 fietque $Qq = Pp$, atque hinc $AQ = AP$. Qua-
 re corpus ofcillans in vacuo ad tantam ascendit
 altitudinem, quanta erat illa ex qua descendit.

Corollarium 3.

535. Si resistentia fuerit valde parua, ideo-
 que k vehementer magnum, erit $e^{\frac{AM+AN}{k}} = 1 +$
 $\frac{MAN}{k}$. Quare hoc casu erit $Qq + \frac{MAN \cdot Qq}{k} = Pp$, at-
 que $Qq = \frac{Pp(k - MAN)}{k}$.

Corollarium 4.

536. Si punctum O fuerit locus, in quo corpus descendens maximam habet celeritatem, ibique ponatur $AO=s$, $AS=x$, erit $\frac{gkdx}{ds} = e^{\frac{s}{k}}b - g$ $e^{\frac{s}{k}} \int e^{-\frac{s}{k}} dx$, seu $b = g \int e^{-\frac{s}{k}} dx + \frac{gkdx}{ds}$. Quare si corpus ex m descendat, erit punctum maximae celeritatis in o , existente $db = g e^{-\frac{s}{k}} dx + \frac{gkdy}{p}$ existente $dy = ov$ et radio osculi in puncto O, seu $\frac{db}{g} = e^{-\frac{AO}{k}} Ss + \frac{kov}{p}$.

Corollarium 5.

537. Tempus vnus itus per MAN habetur, si in integralium summa $\int \frac{e^{\frac{-s}{2k}} ds}{V(b - g \int e^{\frac{-s}{k}} dx)} + \int \frac{e^{\frac{r}{2k}} ds}{V(b - g \int e^{\frac{r}{k}} dt)}$ ponatur $\int e^{\frac{-s}{k}} dx = \frac{g}{b}$ atque $\int e^{\frac{r}{k}} dt = \frac{b}{g}$. Sicque prodibit tempus vnus femioscillationis.

Corollarium 6.

538. Ex dictis alia elegans sequitur proprietas, vt si corpus ex A celeritate \sqrt{b} ascendat ad N atque ex N iterum decadat per NA sitque celeritas quam tum in A habebit debita altitudini c .
Dein-

Deinde ex A celeritate altitudini $b + db$ debita ascendat pertingatque ad n , vnde rursus descendendo in A acquirat celeritatem altitudini $c + dc$ debitam. Erit ergo $\frac{db}{g} = e^{\frac{AN}{k}}$. Qq et $\frac{dc}{g} = e^{-\frac{AN}{k}}$. Qq . Atque $Qq^2 = \frac{db \cdot dc}{g^2}$, vel etiam $\frac{db}{dc} = e^{\frac{2AN}{k}}$.

Scholion.

539. Restat vt haec generalia ad exempla seu datas curuas accommodemus, quo vsus eorum eo magis pateat. Accipiemus autem pro curua data cycloidem tantum, eo quod $\int e^{\frac{s}{k}} dx$ in ea facile possit exhiberi, et aequatio quoque inter s et x sit algebraica. Inuestigabimus ergo tam descensus super cycloide factos, quam oscillationes, quo appareat, quantum oscillationes, quae in cycloide fiunt, ab isochronismo discrepent; quippe quae in vacuo omnes eodem tempore absolui sunt demonstratae.

PROPOSITIO 62.

Problema.

540. Sit curua data cyclois ACB super basi Tab. XIII.
horizontali AB prouolutione circuli diametri CD de- Fig 1.
scripta; corpusque super ea ex A descendat in medio
resistente in duplicata ratione celeritatum, determinare
motum corporis descendētis.

Mm 3

So-

Solutio.

Posita $2CD=a$, $AL=x$, et $AM=s$ erit ex natura cycloidis $s=a-\sqrt{(a^2-2ax)}$ seu $2ax=2as-ss$. Celeritas vero in M debita fit altitudini v , erit $v=ge^{\frac{-s}{k}}\int e^{\frac{s}{k}}dx$. Quia autem est $dx=ds-\frac{sds}{a}$, erit $\int e^{\frac{s}{k}}dx=ke^{\frac{s}{k}}+\frac{k^2e^{\frac{s}{k}}}{a}-\frac{ke^{\frac{s}{k}}s}{a}-k-\frac{k^2}{a}=e^{\frac{s}{k}}\left(\frac{ak+k^2-ks}{a}\right)-\frac{ak-k^2}{a}$. Quo valore substituto erit $v=\frac{g ak+g k^2-g ks}{a} \frac{e^{\frac{-s}{k}}}{e^{\frac{s}{k}}(ak+k^2)}$. Maxima corporis erit celeritas

vbi est $v=\frac{g k dx}{ds}=\frac{g ak-g ks}{a}$; hoc igitur accidit vbi est $e^{\frac{s}{k}}k=a+k$ seu $s=k l \frac{a+k}{k}$. Inueniri etiam potest punctum N in quo corpus omnem celeritatem perdit faciendo $v=0$ seu $e^{\frac{s}{k}}=\frac{a+k}{a+k-s}$ seu $s=k l \frac{a+k}{a+k-s}$, ex qua aequatione valor ipsius s dat arcum ACN. Tempus quo arcus AM descensu absoluitur est $=\int \frac{ds\sqrt{a}}{\sqrt{gk(a+k-s-e^{\frac{-s}{k}}(a+k))}}$.

Deinde ad pressionem inueniendam est $\frac{dy}{ds}=\frac{\sqrt{(2as-ss)}}{a}$
 $=\frac{\sqrt{2ax}}{a}$, vnde pressio ipsa in puncto M prodit
 $=\frac{g\sqrt{2ax}}{a}+\frac{2gak+2gkk-2gks}{a\sqrt{2ax}}-\frac{2gak-2gkk}{e^{\frac{s}{k}}a\sqrt{2ax}}$

De-

Determinauimus ergo celeritatem, et tempus, et pressiōem, vnde motus corporis innotescit. Q.E.I.

Corollarium 1.

541. Quia est $e^{-\frac{s}{k}} = 1 - \frac{s}{1.k} + \frac{s^2}{1.2.k^2} - \frac{s^3}{1.2.3.k^3} + \text{etc.}$ si ponatur $a + k = c$ seu $a = c - k$ erit $\frac{(c-k)v}{gk} = -s + \frac{cs}{1.k} - \frac{cs^2}{1.2.k^2} + \frac{cs^3}{1.2.3.k^3} - \text{etc.} = \frac{as}{1.k} - \frac{cs^2}{1.2.k^2} + \frac{cs^3}{1.2.3.k^3} - \text{etc.}$ Quare erit $v = \frac{gs}{a} \left(\frac{a}{1} - \frac{s}{1.2} - \frac{as}{1.2.k} + \frac{(a+k)s^2}{1.2.3.k^2} - \frac{(a+k)s^3}{1.2.3.4.k^3} + \text{etc.} \right)$

Corollarium 2.

542. In vacuo igitur, vbi k est infinitum, erit $v = gs - \frac{gs^2}{2.a} = gx$, vt constat. At si resistentia tantum sit valde parua et propterea k valde magnum erit $v = gs - \frac{gs^2}{2.a} - \frac{gs^2}{2.k} + \frac{gs^3}{6.ak}$.

Corollarium 3.

543. In vacuo apparet celeritatem corporis esse nullam in duobus punctis vbi est $s=0$ et $s=2a$, i. e. in duobus cuspidibus A et B. In medio vero resistente alter locus est $s=0$, alter vero ex hac aequatione erui debet $a = \frac{cs}{1.2.k} - \frac{cs^2}{1.2.3.k^2} + \frac{cs^3}{1.2.3.4.k^3} - \text{etc.}$ vnde inuenitur $s = \frac{2ak}{c} + \frac{4a^2k}{3c^2} + \frac{13a^3k}{9c^3} + \frac{196a^4k}{135c^4} + \text{etc.}$ Si igitur k fuerit valde magnum erit $s = \frac{2ak}{a+k} + \frac{4a^2k}{3(a+k)^2} = 2a - \frac{2a^2}{3k}$ quam proxime.

Co-

Corollarium 4.

544. Eadem haec series inuenta substitutó $a+k$ loco c transformatur in hanc $s = 2a - \frac{2a^2}{3k} + \frac{7a^3}{9k^2} - \frac{119a^4}{135k^3} + \text{etc.}$ ex qua valor ipsius s dat arcum ACN, quo vsque corpus motu suo pervenire potest.

Corollarium 3.

545. Arcus AO ab A vsque ad O, vbi corpus maximam habet celeritatem, est $= k \sqrt{\frac{a+k}{k}} = a - \frac{a^2}{2k} + \frac{a^3}{3k^2} - \frac{a^4}{4k^3} + \frac{a^5}{5k^4} - \text{etc.}$ Quare erit arcus ON $= a - \frac{a^2}{6k} + \frac{4a^3}{9k^2} - \text{etc.}$ OC $= \frac{a^2}{2k} - \frac{a^3}{3k^2} + \frac{a^4}{4k^3} - \text{etc.}$ et $-AO + ON = \frac{a^2}{3k} + \frac{a^3}{9k^2}.$

Corollarium 6.

546. Celeritas vero in puncto C reperitur debita altitudini $= \frac{gk^2 - g e^{-\frac{a}{k}} (ak + kk)}{a} = g \left(\frac{a}{2} - \frac{a^2}{1.3k} + \frac{a^3}{1.2.4.k^2} - \frac{a^4}{1.2.3.5.k^3} + \frac{a^5}{1.2.3.4.6.k^4} - \text{etc.} \right).$ Vnde perspicitur celeritatem in C nunquam posse esse evanescentem; nam altitudo huic celeritati debita est $= \frac{gk^2}{e^{\frac{a}{k}} a} (e^{\frac{a}{k}} - 1 - \frac{a}{k}),$ atque $e^{\frac{a}{k}}$ semper maius est quam $1 + \frac{a}{k}$; excessus autem maior est quam $\frac{a^2}{2k^2}.$ Quare altitudo debita celeritati in C
ma-

maior est quam $\frac{g a}{2 c k}$, ideoque ACN maior est quam AC.

Corollarium 7.

547. Altitudo debita celeritati maximae in O est $= g k - \frac{g k^2}{a} l \frac{a+k}{k} = g \cdot (\frac{a}{2} - \frac{a^2}{3 k} + \frac{a^3}{4 k^2} - \frac{a^4}{5 k^3} + \text{etc.})$. Quare excessus huius altitudinis supra altitudinem celeritati in C debitam est $= g (\frac{a^3}{1.2.4 k^2} - \frac{5 a^4}{1.2.3.5 k^3} + \frac{23 a^5}{1.2.3.4.6 k^4} - \text{etc.}) = g e^{\frac{-a}{k}} (\frac{a^3}{8 k} + \frac{a^4}{24 k^2} + \text{etc.})$. Haec nempe expressio obtinetur, si in generali valore ipsius v substituatur $k l \frac{a+k}{k}$ loco s , quippe cui quantitati arcus AO est aequalis.

Scholion.

548. In solutione huius propositionis considerandum venit, quod ex formula descensum tantum determinante etiam ascensum corporis super arcu CN deriuauimus; ex quo dubium oriri potest, an iste ascensus legitime sit definitus. Hoc autem ex ipsa formula ascensum determinante facile perspicitur. Vñ enim fuimus formula hac $dv = g dx - R ds$, quae puncto M ultra punctum C cadente propter dx factum negatiuum abit in hanc $dv = -g dx - R ds$, quae reuera naturam ascensus continet. Ex his intelligitur continuitas inter ascensum et descensum, qua nullo interiecto

faltu inter se cohaerent. Vbi enim curua se sursum flectere incipit, ibi simul formula descensui inferuiens transmutatur sponte in formulam ascensus. Atque haec connexio locum habet in medio quocunque resistente, vti ex generalibus formulis apparet, quae tantum signo ipsius dx discrepant. Quamobrem data aequatione pro curua quacunque, non est necesse vt inquiratur, super quam parte corpus ascendat descendatve, sed alterutra formula ad aequationem accommodata verum dabit motum super curua proposita. Hoc tantum est tenendum, vt abscissae in axe verticali capiuntur, atque ea formula siue ascensus siue descensus adhibeatur, quae cum motus initio congruat.

PROPOSITIO 63.

Problema.

Tab. XII.
Fig. 1.

549. *Sit curua data ACB cyclois super basi horizontali AB descripta et deorsum spectans, corpusque super ea oscillationes peragat in medio resistente in duplicata ratione celeritatum, determinare motum oscillatorium.*

Solutio.

Ponatur diameter circuli $CD = \frac{1}{2}a$, in eaque sumatur abscissa $CP = x$, et arcus CM vocetur s , erit ex natura cycloidis $s = \sqrt{2ax}$ et $x = \frac{s^2}{2a}$ atque $dx = \frac{sd s}{a}$. Descendat nunc corpus super arcu

cu MC, sitque eius celeritas in C debita atitudi-
ni b , erit altitudo debita celeritati in M $= e^{\frac{s}{k}} b$

$- g e^{\frac{s}{k}} \int e^{-\frac{s}{k}} dx$ (523.). Est vero $\int e^{-\frac{s}{k}} dx = \int \frac{e^{-\frac{s}{k}} ds}{a}$

$= \frac{k^2 - k^2 e^{-\frac{s}{k}} - k e^{-\frac{s}{k}} s}{a}$; quare altitudo debita cele-

ritati in M est $= \frac{e^{\frac{s}{k}} (ab - gk^2) + gk^2 + gks}{a} =$

$e^{\frac{s}{k}} b - \frac{g}{a} \left(\frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{2 \cdot 3 \cdot k} + \frac{s^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot k^2} + \frac{s^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot k^3} + \text{etc.} \right)$

Arcus ergo in quo integer fit descensus habebitur

si ipsius s valor ex hac aequatione quaeratur: $e^{\frac{s}{k}} = \frac{gk^2 + gks}{gk^2 - ab}$. Fiet autem hinc in serie $s = A + \frac{A^2}{3k}$

$+ \frac{5A^3}{24k^2} + \frac{11A^4}{180k^3} + \text{etc.}$ posito breuitatis ergo A loco $\frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}$. Huic ergo seriei aequatur arcus CM,

si quidem corpus ex puncto M descendere ince-
perit. Celeritatem maximam corpus habebit in

O sumto $CO = s$ ex hac aequatione $e^{\frac{s}{k}} = \frac{gk^2}{gk^2 - ab}$

seu $CO = k \int \frac{gk^2}{gk^2 - ab}$, atque altitudo huic maximae

celeritati debita est $= \frac{gk \cdot CO}{a} = \frac{gk^2}{a} \int \frac{gk^2}{gk^2 - ab} = b +$

$\frac{ab^2}{2gk^2} + \frac{a^2b^3}{3g^2k^4} + \text{etc.}$ Ad tempus determinandum

conuenit ad punctum O celeritatemque maximam

respicere, et tempus per MO definire. Hanc ob

rem pono altitudinem celeritati in O debitam $= c$,

Nn 2

et

et arcum $MO = q$, erit $CO = \frac{ac}{gk}$ et $ab = gk^2 (1 - \frac{ac}{gk^2})$, $s = \frac{ac}{gk} + q$. His substitutis erit altitudo

$$\text{debita celeritati in M seu } v = \frac{gk^2 + ac + gkq - e^{\frac{q}{k}} gk^2}{a}$$

Quia nunc v minor est quam c , pono $c - v = z$, eritque $az + gk^2 + gkq = e^{\frac{q}{k}} gk^2$ atque in serie

$$\frac{az}{z} = \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{6k} + \frac{q^4}{24k^2} + \frac{q^5}{120k^3} + \text{etc.}$$

$$\text{Ex qua convertendo fit } q = \frac{\sqrt{2az}}{\sqrt{g}} - \frac{az}{3gk} + \frac{az\sqrt{2az}}{18gk^2\sqrt{g}} - \frac{2a^2z^2}{135g^2k^3} +$$

$$\frac{a^2z^2\sqrt{2az}}{1080g^2k^4\sqrt{g}} - \text{etc.}$$

Incipiat descensus in puncto M, erit ibi $v = 0$ et $z = c$, ideoque $OM = \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} - \frac{ac}{3gk}$

$$+ \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}} - \frac{2a^2c^2}{135g^2k^3} + \frac{a^2c^2\sqrt{2ac}}{1080g^2k^4\sqrt{g}} - \text{etc.}$$

Ex eadem formula, si ponatur q negativum, habebitur motus per OCN: at quia perinde est, siue q ponatur negativum siue k , erit arcus ON, si N fuerit punctum quousque corpus ascendit, $= \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} + \frac{ac}{3gk}$

$$+ \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}} + \frac{2a^2c^2}{135g^2k^3} + \frac{a^2c^2\sqrt{2ac}}{1080g^2k^4\sqrt{g}} + \text{etc.}$$

Tempus vero per MO hoc modo inuenitur; quia est $d.s = dq = \frac{adz}{\sqrt{2gaz}} - \frac{adz}{3gk} + \frac{adz\sqrt{2az}}{12gk^2\sqrt{g}} - \frac{4a^2zdz}{135g^2k^3} + \frac{a^2zdz\sqrt{2az}}{432g^2k^4\sqrt{g}} - \text{etc.}$

hoc dimittit per $\sqrt{v} = \sqrt{(c-z)}$ dat elementum temporis $= \frac{dz\sqrt{a}}{\sqrt{2g}(c-z)^2} - \frac{adz}{3gk\sqrt{(c-z)}} +$

$$\frac{azdz\sqrt{2a}}{12gk^2\sqrt{g}(c-z)^3} - \frac{4a^2zdz}{135g^2k^3\sqrt{(c-z)}} + \frac{a^2z^2dz\sqrt{2a}}{432g^2k^4\sqrt{g}(c-z)^3} - \text{etc.}$$

Quod ita integrari debet utposito $v = c$ vel $z = 0$ evanescat; deinde si ponatur $z = c$ habebitur tempus quo corpus per arcum MO descendit. Hoc igitur tempus posita peripheriae ad diametrum

ratione

ratione π ad 1 erit $= \frac{\pi \sqrt{a}}{\sqrt{2g}} - \frac{2a\sqrt{c}}{3gk} + \frac{\pi ac\sqrt{a}}{12gk^2\sqrt{2g}} - \frac{4a^2c\sqrt{c}}{135g^2k^3} + \text{etc.}$ Posito igitur k negativo erit tempus quo corpus ex O ad N vsque ascendit $= \frac{\pi \sqrt{a}}{\sqrt{2g}} + \frac{2a\sqrt{c}}{3gk} + \frac{\pi ac\sqrt{a}}{12gk^2\sqrt{2g}} + \frac{4a^2c\sqrt{c}}{135g^2k^3} + \text{etc.}$ Tempus ergo per MCN seu tempus vnius dimidia oscillationis est $= \frac{\pi \sqrt{2a}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi ac\sqrt{2a}}{12gk^2\sqrt{g}} + \text{etc.}$ Q. E. I.

Corollarium I.

550. Si ergo celeritas maxima corporis descendencis fuerit debita altitudini c , propter CO $= \frac{ac}{gk}$ erit MC $= \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} + \frac{2ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}} - \frac{2a^2c^2}{135g^2k^3} + \frac{a^2c^2\sqrt{2ac}}{1080g^2k^4\sqrt{g}} - \text{etc.}$ Totus vero ascensus CN erit $= \text{ON} - \text{CO} = \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} - \frac{2ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}} + \frac{2a^2c^2}{135g^2k^3} + \frac{a^2c^2\sqrt{2ac}}{1080g^2k^4\sqrt{g}} + \text{etc.}$ Hinc erit CM - CN $= \frac{4ac}{3gk} - \frac{4a^2c^2}{135g^2k^3} - \text{etc.}$ atque MCN $= \frac{2\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{9gk^2\sqrt{g}} + \frac{a^2c^2\sqrt{2ac}}{540g^2k^4\sqrt{g}} + \text{etc.}$

Corollarium 2.

551. Si totus arcus descensus MC ponatur $= E$ et sequens arcus ascensus CN $= F$, atque altitudo debita celeritati in C $= h$, erit $\frac{ab}{g} = k^2 - e^{-\frac{E}{k}}$
 $(k^2 + kE) = \frac{E^2}{2} - \frac{E^3}{3k} + \frac{E^4}{8k^2} - \frac{E^5}{30k^3} + \frac{E^6}{144k^4} - \text{etc.}$
 Atque posito k negativo eodem modo inuenitur
 $\frac{ab}{g} = \frac{F^2}{2} + \frac{F^3}{3k} + \frac{F^4}{8k^2} + \frac{F^5}{30k^3} + \frac{F^6}{144k^4} + \text{etc.}$ Ex quibus fit $F = E - \frac{2E^2}{3k} + \frac{4E^3}{9k^2} - \frac{26E^4}{135k^3} + \frac{86E^5}{405k^4} - \text{etc.}$

atque altitudo debita celeritati maximae $c = \frac{gE^2}{2a}$
 $- \frac{gE^3}{3ak} + \frac{gE^4}{4ak^2} - \text{etc.}$

Corollarium 3.

552. Quia F est arcus ascensus in prima dimidia oscillatione, erit idem arcus F arcus descensus in sequente oscillatione: cum quo ergo coniungetur arcus ascensus $G = E - \frac{4E^2}{3k} + \frac{16E^3}{9k^2} - \frac{28E^4}{15k^3} + \frac{964E^6}{405k^4} - \text{etc.}$ Atque simili modo sequentes oscillationes quotquot libuerit definiri possunt.

Corollarium 4.

553. Ex aequatione tempus exponente apparet tempus quo corpus ex M ad O pervenit semper minus esse tempore quo corpus ex O ad N usque pertingit. Simili modo etiam arcus ON maior est quam arcus OM, arcus vero CN minor est arcu MC.

Corollarium 5.

554. Si oscillationes fuerint infinite parvae, seu c quantitas evanescens, congruent oscillationes cum oscillationibus in vacuo factis; in singulis enim expressionibus iidem termini evanescent, qui evanescerent posito $k = \infty$. Minimis ergo oscillationibus isochronae erunt oscillationes penduli longitudinis a in vacuo, sollicitati a potentia g , seu penduli in hypothesei gravitatis $= 1$, cuius longitudo est $= \frac{a}{g}$.

Co-

Corollarium 6.

555. At si oscillationes fiant maiores, tempora oscillationum quoque fient maiora, quare in hac resistentiae hypothesi cyclois tautochronismi proprietate non gaudet. Quo enim in quaque oscillatione maior fuerit celeritas maxima, maior quoque erit excessus temporis oscillationis huiusmodi supra tempus oscillationis minimae.

Scholion I.

556. Quod diximus oscillationes minimas cum oscillationibus in vacuo congruere locum habet, si a et k fuerint quantitates finitae magnitudinis. Si enim a esset infinite magnum, seu k infinite paruum, sequentes termini tempus exprimentes $\frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi ac\sqrt{2a}}{12gk^2\sqrt{g}} + \text{etc.}$ non euanescerent etiam si c , esset infinite paruum. Tum igitur tantum oscillationes minimae super curua quacunque in vacuo et medio resistente inter se congruent, quando neque radius osculi curuae in infimo puncto fuerit infinite magnus, neque resistentia infinite magna.

Exemplum.

557. Exempli loco euoluamus casum, quo resistentia tam fit exigua, ideoque k quantitas tam magna ut fractiones, in quarum denominatoribus k plures duabus habet dimensiones, tuti pro nihilo haberi possint. Dicta igitur altitudine celeritati maximae in O debita c , ita ut sit $CO = \frac{ac}{gk}$;
erit

erit arcus descensus $MC = E = \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} + \frac{2ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}}$
et sequens arcus ascensus $CN = F = \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} - \frac{2ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}}$. Vnde invenitur $\sqrt{c} = \frac{E\sqrt{g}}{\sqrt{2a}} - \frac{E^2\sqrt{g}}{3k\sqrt{2a}} + \frac{7E^3\sqrt{g}}{36k^2\sqrt{2a}}$, seu $c = \frac{gE^2}{2a} - \frac{gE^3}{3ak} + \frac{gE^4}{3ak^2}$ atque $F = E - \frac{2E^2}{3k} + \frac{4E^3}{9k^2}$. Tempus ergo dimidia oscillationis per MCN est $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi E^2\sqrt{2a}}{24k^2\sqrt{g}}$. In sequente dimidia oscillatione est arcus descensus $= F = E - \frac{2E^2}{3k} + \frac{4E^3}{9k^2}$, quem sequetur arcus ascensus $G = E - \frac{4E^2}{3k} + \frac{16E^3}{9k^2}$; atque tempus huius dimidia oscillationis erit $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi E^2\sqrt{2a}}{24k^2\sqrt{g}} - \frac{\pi E^3\sqrt{2a}}{18k^3\sqrt{g}}$, vbi ultimus terminus negligi potest ob k^3 in denominatore. In tertia semiofcillatione est arcus descensus $= G = E - \frac{4E^2}{3k} + \frac{36E^3}{9k^2}$, et arcus descensus $= H = E - \frac{6E^2}{3k} + \frac{36E^3}{9k^2}$. Atque generaliter in ea semiofcillatione, quae indicatur numero n est arcus descensus $= E - \frac{2(n-1)E^2}{3k} + \frac{4(n-1)^2E^3}{9k^2}$ et arcus ascensus $= E - \frac{2nE^2}{3k} + \frac{4n^2E^3}{9k^2}$. Quamobrem post n semiofcillationes corpus ab infimo puncto C distabit arcu $E - \frac{2nE^2}{3k} + \frac{4n^2E^3}{9k^2}$, qui minor est quam arcus descensus primae oscillationis quantitate $\frac{2nE^2}{3k} - \frac{4n^2E^3}{9k^2}$. Tempus autem semiofcillationis numero n indicatae erit $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi E^2\sqrt{2a}}{24k^2\sqrt{g}} - \frac{\pi(n-1)E^3\sqrt{2a}}{18k^3\sqrt{g}}$. At si totus arcus primae semiofcillationis MCN dicatur A , erit $A = 2E - \frac{2E^2}{3k} + \frac{4E^3}{9k^2}$ et $E = \frac{A}{2} + \frac{A^2}{12k}$ evanescente sponte termino sequente. Hinc

sequente. Hinc totus arcus oscillatione per numerum n indicata descriptus erit $= 2E - \frac{2(2n-1)E^2}{3k} + \frac{4(2n^2-2n+1)E^3}{9k^2} = A - \frac{(n-1)A^2}{3k} + \frac{(n-1)^2A^3}{9k^2}$.

Corollarium 7.

558 Si n fiant oscillationes dimidia et arcus descensus primae oscillationis fuerit E et arcus ascensus vltimae $= L$, erit $L = E - \frac{2nE^2}{3k} + \frac{4n^2E^3}{9k^2}$, quae expressio, si per seriem propius capiatur, fere congruet cum progressionem geometrica eiusdem initii, hancque ob rem erit $L = \frac{3Ek}{3k+2nE}$ seu $3k(E-L) = 2nEL$.

Corollarium 8.

559. Hinc si peractis aliquot semioscillationibus detur arcus descensus primae oscillationis E , vna cum arcu ascensus vltimae L inueniri potest numerus semioscillationum n est, namque $n = \frac{3k(E-L)}{2EL}$.

Corollarium 9.

560. Patet ergo diminutionem arcuum non a longitudine penduli pendere, sed ex n et E datis idem reperitur arcus L quaecunque fuerit longitudo penduli a . Atque est semper n proportionalis ipsi $\frac{1}{L} - \frac{1}{E}$.

Scholion 2.

561. Huiusmodi experimenta circa oscillationes in medio resistente multa recenset Newt. in Tom. II. O o Phil.

Phil. Lib. II. vbi notat arcum descensus primae, arcum descensus vltimae oscillationis atque numerum oscillationum tam in aëre quam in aqua et mercurio. Quare si haec media perfecte resisterent in duplicata celeritatum ratione, congrua esse deberent cum hisce formulis, ita vt decrementum arcus proportionale esset numero oscillationum et arcui primo et vltimo coniunctim. Quod etiam locum habere obseruavi in maioribus oscillationibus, in quibus celeritas non est nimis exigua. At in oscillationibus minimis maxima aberratio ab hac regula conspicitur. Ex quo colligitur quo maior fuerit corporis celeritas in fluido, eo propius resistantiam accedere ad rationem duplicatam celeritatum, motum autem tardissimum alii resistantiae insuper esse obnoxium, quae in motibus celerioribus prae resistantia, quae quadratis celeritatum est proportionalis, evanescat. In hisce quoque experimentis Newtonus resistantiam partim simplici celeritatum rationi, partim sesquuplicatae, partim duplicatae proportionalem assumpsit, neque tamen pro motibus tardissimis satisfecit. In vltima vero Phil. Editione ipse Newtonus quoque insufficientem priorem theoriam suam agnoscit; atque pluribus rationibus ostendit alteram illam fluidorum resistantiam esse constantem seu temporis momentis proportionalem; quam antea ipsis celeritatibus proportionalem erat arbitratus. Hanc ob rem istam resistantiam cum ea, quae quadratis celeritatum est propor-

proportionalis in fequenti propofitione coniunctam confiderabimus; cum praefertim aequationum refolutio et celeritatum determinatio hac adiectione non difficilior euadat.

Corollarium IO.

562. Quod ad tempora ofcillationum et femiofcillationum attinet, perfpicuum eft ea decrefcere, quo minores fiant arcus defcripti; atque fi arcus plane euaneſcant tempus dimidiae ofcillationis fore $= \frac{\pi\sqrt{2}a}{\sqrt{g}}$.

Corollarium II.

563. Exceffus autem cuiusque femiofcillationis temporis fupra tempus minimae femiofcillationis in cafu refiftentiae minimae eft $\frac{\pi E^2\sqrt{2}a}{24k^2\sqrt{g}}$, denotante E arcum defcenfus illius femiofcillationis. Quare ifte exceffus proportionalis eft quadrato arcus defcenfus, vel etiam quadrato totius arcus femiofcillatione defcripti.

Scholion 3.

564. Cyclois igitur, quae ab Hugenio apta eft demonſtrata ad ifochroniſmum pendulorum producendum, hanc proprietatem in medio refiftente in duplicata celeritatum ratione amittit, et hanc ob rem in aëre non inferuit, niſi vel ofcillationes fint valde paruae, vel inter ſe proxime aequales. Ex hoc vero, quod maiores ofcilla-

scillationes diutius durent, colligi licet, veram curuam tautochronam in hac resistantiae hypothesi magis esse curuam quam cycloidem. Quemadmodum scilicet cyclois in circulo eiusdem radii, cuius cyclois est in infimo puncto, continetur, ita quoque vera tautochrone in cycloide continebitur, atque eius curuedo a puncto infimo magis decrescet, quam curuedo cycloidis.

PROPOSITIO 64.

Problema.

Tab. XIII.
Fig. 1.

565. Si medii resistantia partim fuerit constans, partim quadratis celeritatum proportionalis, determinare motum oscillatorium corporis super cycloide MCB, saltem in casu quo resistantia est valde parua.

Solutio.

Sit ut ante diameter circuli generatoris $CP = \frac{1}{2}a$; $CP = x$; et arcus $CM = s$. Ponatur celeritas in C debita altitudini b , et celeritas in M altitudini v . Potentia corpus perpetuo deorsum sollicitans sit $=g$, pars resistantiae quae est constans sit $=b$, et pars resistantiae quadratis celeritatum proportionalis sit $=\frac{v}{k}$ ut ante; erit k quantitas valde magna respectu v et s et a ; atque b valde paruum respectu g . Iam fiat descensus super arcu MC, erit $dv = -gdx + bds + \frac{vds}{k}$, atque hinc $v = e^{\frac{s}{k}}b - e^{\frac{s}{k}} \int e^{-\frac{s}{k}}(gdx - bds)$.

At

SVPER DATA LINEA IN MEDIO RES. 293

At quia est ex natura cycloidis $dx = \frac{sd s}{a}$ erit $\int e^{\frac{-s}{k}}$

$$g dx = \frac{gk^2 - gk^2 e^{\frac{-s}{k}} - gke^{\frac{-s}{k}} s}{a} \text{ et } \int e^{\frac{-s}{k}} b ds = bk - b$$

$$ke^{\frac{-s}{k}}; \text{ vnde fit } v = \frac{e^{\frac{s}{k}}(ab + bak - gk^2) - bak + gk^2 + gks}{a}$$

Celeritas maxima habetur si fuerit $\frac{gs}{a} = b + \frac{v}{k}$ seu

$$e^{\frac{s}{k}} = \frac{gk^2}{gk^2 - ab - bak}. \text{ Dicatur altitudo debita celerita-}$$

ti maximae in $O = c$, erit $CO = \frac{ba}{g} + \frac{ac}{gk}$ et ab

$$= gk^2 - bak - gk^2 e^{\frac{-bak-ac}{gk^2}}. \text{ Ponatur arcus } MO =$$

$$q \text{ erit } s = \frac{ba}{g} + \frac{ac}{gk} + q; \text{ vnde fit } v =$$

$$\frac{ac + gk^2 + gkq - e^{\frac{q}{k}} gk^2}{a}. \text{ Quia nunc } v \text{ minus est}$$

quam c , pono $c - v = z$, erit $az + gk^2 + gkq$

$$= e^{\frac{q}{k}} gk^2. \text{ Quae aequatio in seriem conuerfa}$$

dat vt supra $\frac{az}{g} = \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{6k} + \frac{q^4}{24k^2}$, atque $q = \frac{\sqrt{2az}}{\sqrt{g}}$

$$- \frac{az}{3gk} + \frac{az\sqrt{2az}}{18gk^2\sqrt{g}}. \text{ Incipiat descensus ex } M, \text{ erit}$$

$$\text{ibi } v = 0 \text{ et } z = c, \text{ ideoque } MO = \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} - \frac{ac}{3gk} +$$

$$\frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}}. \text{ Ex eadem formula reperitur arcus ascen-}$$

$$\text{sus } ON = \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} + \frac{ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}}; \text{ atque cum in his}$$

b non reperiatur erit vt supra tempus semiofcil-

$$\text{lationis per } MON = \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi ac\sqrt{2a}}{12gk^2\sqrt{g}}. \text{ Totus vero}$$

$$\text{arcus descensus } MC \text{ erit } = \frac{ba}{g} + \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} + \frac{2ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}};$$

$$\text{atque arcus ascensus } CN = -\frac{ba}{g} + \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} - \frac{2ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}}.$$

Qo 3

Quare

Quare si arcus descensus MC ponatur E et arcus ascensus CN=F, erit $F=E-\frac{2ba}{g}-\frac{2E^2}{3k}+\frac{4baE}{3gk}+\frac{4E^3}{9k^2}$. In sequente semioscillatione est arcus descensus F et arcus ascensus $G=E-\frac{4ba}{g}-\frac{4E^2}{3k}+\frac{16baE}{3gk}+\frac{16E^3}{9k^2}$. Atque generaliter in ea semioscillatione, quae indicatur numero n , arcus ascensus est $=E-\frac{2nba}{g}-\frac{2nE^2}{3k}+\frac{4n^2baE}{3gk}+\frac{4n^2E^3}{9k^2}=\frac{3gkE-6bnak}{3gk+2gnE}$. Quare si peractis n semioscillationibus dicatur arcus descensus primae E et arcus ascensus ultimae L, erit $2gnEL=3gk(E-L)-6bnak$ seu $n=\frac{3gk(E-L)}{2gEL+6bak}$. Tempus vero quo quaelibet semioscillatio per M CN absoluitur est $=\frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}+\frac{\pi(gE-ba)^2\sqrt{2a}}{24g^2k^2\sqrt{g}}$ loco c eius valore substituto. Q. E. I.

Corollarium I.

566. Si ponatur $c=0$, ut locus prodeat in quo corpus sit quieturum, inuenitur $MC=\frac{ba}{g}$: corpus ergo in quiete permanere potest non solum in puncto C, sed extra C quoque in distantia $\frac{ba}{g}$ cis et ultra C. Quare in huiusmodi medio resistente ex statu quietis penduli non exacte linea verticalis potest cognosci; sed angulo cuius sinus est $\frac{b}{g}$ aberrari potest.

Scholion I.

567. Huiusmodi resistantiam in aqua locum habere experimentis facile euincitur, quippe in
moti-

motibus tardissimis resistentia quadratis celeritatum minime proportionalis observatur; in fluido vero praeter resistentiam quadratis celeritatum proportionalem aliam non dari probabile est, nisi resistentiam constantem. Confirmatur hoc etiam experimentis a *La Hirio* institutis, quibus monstravit pendulum in aqua extra situm verticalem in quiete permanere posse. Quod fieri non posset, si resistentia a sola celeritate penderet. Ex experimentis *Newtoni*, quae circa retardationem motus pendulorum in aëre instituit, concludi potest globi plumbei diametri 2 dig. resistentiam constantem esse circiter partem millionesimam gravitatis, seu $\frac{b}{g} = \frac{1}{1000000}$. Hic ergo globus filo suspensus a linea verticali aberrare potest angulo $10''$, qui autem error est insensibilis. Maior autem et sensibilis esse poterit hic error, quo minor simulque leuior globus adhibeatur.

Corollarium 2.

568. Ad hunc angulum inveniendum inferuit ista aequatio ex superiori deducta $\frac{b}{g} = \frac{E-L}{2na} - \frac{EL}{3ak} = \sinui\ anguli$, quo pendulum a linea verticali declinare potest. At loco E arcum paruum accipi convenit, quo termini neglecti eo magis fiant insensibiles.

Corollarium 3.

569. Ex aequatione $n = \frac{3gk(E-L)}{2gEL + 6hak}$ apparet quo maior sit arcus oscillatione descriptus eo minorem

norem fieri terminum $6bak$ respectu $2gEL$. Atque hoc in causa est, quod haec resistentia tantum in minimis oscillationibus sentiatur.

Corollarium 4.

570. Quia b est numerus, tum per hypothesin valde parvus, tum in subtilibus fluidis, ad quae haec propositio est accommodata, reipsa fere euanescens: in expressione temporis euanescet quoque ba prae gE , ideoque tempus vnus semioscillationis erit $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi E^2\sqrt{2a}}{24k^2\sqrt{g}}$ Resistentia igitur constans non immutabit tempora oscillationum.

Scholion 2.

571. Etiam si ergo haec resistentia constans cum resistentia quadratis celeritatum proportionali coniuncta consideretur, calculus eo neque fit prolixior neque difficilior. Nam ex celeritate maxima \sqrt{c} totus arcus vna semioscillatione descriptus eodem modo determinatur, siue haec resistentia constans adsit siue non; utroque enim casu plane eadem obtinetur aequatio. Quamobrem vel ex hoc ipso sequi videtur, hanc resistentiae legem in natura locum habere, alias vero resistentias praeter hanc et eam, quae quadratis celeritatum est proportionalis, actu non inueniri. Fluida autem iam pridem duplicem resistentiam exercere obseruata sunt, alteram quadra-

is

tis celeritatum proportionalem, quae in motibus celerioribus sola obseruetur, alteram in motibus tardissimis tantum sensibilem. Illa resistentia oritur a vi inertiae particularum fluidi, et per eam corpus de motu suo amittit, quando particulas eas remouet; quam quadratis celeritatum proportionalem esse dubitari nequit. Haec vero resistentia a tenacitate fluidi ortum habet, qua particulae fluidi inter se cohaerent et difficulter a se inuicem separantur. Dum igitur corpus per datum spatium mouetur datus particularum numerus ipsi spatio proportionalis a se inuicem diuelli debet; quare haec resistentia congruit cum potentia absoluta motum corporis retardante; quippe quae etiam per aequalia spatia aequalem ictuum numerum in corpus exerit. Haec igitur resistentia seu vis motui corporis semper est contraria, et secundum ipsam directionem motus in corpus agit, atque ideo est vis tangentialis perpetuo constans et retardans. At hoc casu natura a calculo exceptionem postulat, quando corpus quiescit. Quoniam enim haec vis est constans, aequae agere deberet in corpus quiescens ac in motum; quiescens autem corpus, quia fluidi particulas non diuellit, hanc vim sentire nequit. Accedit ad hoc, quod, cum haec vis directioni motus sit contraria, ea in corpus quiescens, quod nullam habeat directionem, nullum effectum habere queat. At si motus super linea curua inuestigatur, tangens curuae semper pro directione motus habetur, etiamsi

corpus actu quiescat, atque ideo calculus effectum huius vis etiam in corpore quiescente ostendit; hoc igitur casu a calculo exceptionem fieri oportet. Corpus pendulum ergo per aliquod paruum spatium circa C in quiete permanere posse ideo est dicendum, quia eius nîsus versus C non sufficit ad particulas fluidi a se inuicem separandas. Quare corpus quiescere potest in quolibet puncto illius spatioli, etiamsi calculus ostendat, etiam in ipso puncto C corpus non in quiete perseverare posse.

Scholion 3.

572. Ex his quae partim generaliter tradidimus partim de cycloide attulimus, perspicitur, quomodo in medio resistente in duplicata ratione celeritatum motus corporis super quacunque curua possit determinari. Considerauimus quidem medium resistens vniforme, et potentiam sollicitantem quoque aequabilem; sed ex aequatione resoluenda apparet, eam quoque integrari posse, quomodocunque tum medium sit difforme, tum potentia sollicitans variabilis, semper enim in aequatione altitudo celeritati debita v vnica tantum habet dimensionem. Progredior igitur ad alias medii resistentis hypothesen; sed quia tum non pro quauis curua motus potest definiri, curuae primo sunt inueniendae, quae determinationem motus admittunt. Assumimus hic autem iux-

ta institutum nostrum eas curvas, quae ad aequationem homogeneam deducunt, in qua indeterminatae vbique eundem obtinent dimensionum numerum. Si resistentia fuerit potestati celeritatum exponentis $2m$ proportionalis, habetur ista

$$\text{aequatio } dv = \pm g dx \pm \frac{v^m ds}{k^m}, \text{ quae quo sit ho-}$$

mogenea inter v et x debet esse $ds = x^{-m} dx$,

seu $s = a^m x^{1-m}$, seu $x = a^{\frac{m}{m-1}} s^{\frac{1}{1-m}}$. Vel si x et s datis quantitibus augeantur vel diminu-
antur, in curva, cuius haec est aequatio $x = a^{\frac{m}{m-1}}$

$(s+f)^{\frac{1}{1-m}} = a^{\frac{m}{m-1}} f^{\frac{1}{1-m}}$, motus quoque determinari potest. In medio ergo resistente in simplici ratione celeritatum curva fit cyclois, ideoque motum super ea determinemus.

PROPOSITIO 65.

Problema.

573. *In medio quod resistit in simplici ratione celeritatum, determinare motum oscillatorium corporis super cycloide ACB, existente tam medio quam potentia sollicitante uniformi.* Tab. XIII.
Fig. 1.

Solutio.

Sit iterum vt ante diameter circuli generatoris $CD = \frac{1}{2}a$: abscissa $CP = x$, et arcus $CM = s$.

Pp 2

Pona-

Ponatur celeritas in C debita altitudini b et celeritas in M altitudini v . Potentia corpus perpetuo deorsum trahens fit $=g$; et resistentia $=\frac{v}{\sqrt{k}}$. Fiat super parte AMC descensus, erit ex

natura descensus $dv = -g dx + \frac{ds\sqrt{v}}{\sqrt{k}} = -\frac{gs ds}{a} +$

$\frac{ds\sqrt{v}}{\sqrt{k}}$. Ponatur $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{k}} = \frac{u}{a}$, erit $v = \frac{ku^2}{a^2}$ et $dv = \frac{2k u du}{a^2}$, unde fit $2k u du = -g a s ds + a u ds$, quae aequatio

ita debet integrari ut facto $s=0$ fiat $u = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{k}}$. Pro

ascensu vero super arcu CN haec habetur aequatio $2k u du = -g a s ds - a u ds$. Ponatur $u = p s$,

habebitur pro descensu $2k p^2 s ds + 2k p s^2 dp = -$

$g a s ds + a p s ds$, seu $\frac{2k p^2 p}{ap - ga - 2k p^2} = \frac{ds}{s}$. Hinc fit

integrando $ls = lC - \frac{1}{2} l(p^2 - \frac{ap}{2k} + \frac{ga}{2k}) + \frac{a}{2\sqrt{a^2 - 8gak}}$

$l \frac{4kp - a + \sqrt{a^2 - 8gak}}{4kp - a - \sqrt{a^2 - 8gak}} = lC - \frac{1}{2} l \frac{2a^2\sqrt{k} - a^2s\sqrt{v} + gas^2\sqrt{k}}{2ks^2\sqrt{k}} +$

$\frac{a}{2\sqrt{a^2 - 8gak}} l \frac{4a\sqrt{k}v - as + s\sqrt{a^2 - 8gak}}{4a\sqrt{k}v - as - s\sqrt{a^2 - 8gak}}$, seu $lC = l(2a^2\sqrt{v}$

$\sqrt{k} - a^2s\sqrt{v} + gas^2\sqrt{k}) - \frac{a}{\sqrt{a^2 - 8gak}} l \frac{4a\sqrt{k}v - as + s\sqrt{a^2 - 8gak}}{4a\sqrt{k}v - as - s\sqrt{a^2 - 8gak}}$

Ponatur $s=0$ et $v=b$ fiet $lC = l2a^2b\sqrt{k}$; hinc

fiet $\frac{2a\sqrt{k} - as\sqrt{v} + gs^2\sqrt{k}}{2ab\sqrt{k}} = \left(\frac{4a\sqrt{k}v - as + s\sqrt{a^2 - 8gak}}{4a\sqrt{k}v - as - s\sqrt{a^2 - 8gak}} \right) \frac{a}{\sqrt{a^2 - 8gak}}$

In altera vero curvae parte CN pro ascensu corporis posito CN = s habetur haec aequatio

$\frac{2a\sqrt{k} + as\sqrt{v} + gs^2\sqrt{k}}{2ab\sqrt{k}} = \left(\frac{4a\sqrt{k}v + as - s\sqrt{a^2 - 8gak}}{4a\sqrt{k}v + as + s\sqrt{a^2 - 8gak}} \right) \frac{a}{\sqrt{a^2 - 8gak}}$. Si

altitudo celeritati maximae, quae fit in O, debita dicatur c , erit $CO = \frac{a\sqrt{c}}{g\sqrt{k}}$, atque $c = b$

$\frac{(4gk - a + \sqrt{a^2 - 8gak})}{4gk - a - \sqrt{a^2 - 8gak}} \frac{a}{\sqrt{a^2 - 8gak}}$. Hae autem aequatio-

nes locum non habent, nisi sit $a^2 > 8gak$, seu

$k < \frac{a^2}{8g}$

$k < \frac{a}{8g}$. Nam si $k > \frac{a}{8g}$ aequationes à logarithmis et quadratura circuli simul pendebunt. Ponamus esse $k = \frac{a}{8g}$, eritque $\frac{ds}{s} = \frac{-p dp}{(p - \frac{a}{4k})^2} = \frac{-dp}{p - \frac{a}{4k}}$

$\frac{a dp}{4k(p - \frac{a}{4k})^2}$. Integrando ergo prodibit $ls = lC - l(p - \frac{a}{4k}) + \frac{a}{4kp - a} = lC - l(\frac{a\sqrt{v}}{s\sqrt{k}} - \frac{a}{4k}) + \frac{as}{4a\sqrt{kv} - as}$
 $= lC - l(4a\sqrt{kv} - as) + ls + \frac{as}{4a\sqrt{kv} - as}$. Fit igitur $lC = l4a\sqrt{kb}$; vnde habebitur $l\frac{4\sqrt{kv} - s}{4\sqrt{kb}} =$

$\frac{ls}{4\sqrt{kv} - s}$. Apparet hinc in descensu celeritatem nusquam esse posse $= 0$, semper enim $4\sqrt{kv}$ maius esse debet quam s . Hoc ergo casu, si celeritas in puncto C sit realis descensus initium sit imaginarium. Quare ubicunque corpus descensum in ceperit celeritas in puncto infimo C erit $= 0$. Ad motum igitur inuestigandum si descensus sit ex puncto dato E fueritque $CE = f$, erit $lC = l + af + 1$, ideoque $l\frac{s - 4\sqrt{kv}}{f} = \frac{4\sqrt{kv}}{4\sqrt{kv} - s}$. Ex quo intelligitur semper esse debere $4\sqrt{kv} < s$, quamobrem in puncto C ubi $s = 0$ debet quoque esse $v = 0$. Maxima celeritas, quae fit in O habetur ponendo $\sqrt{v} = \frac{gs\sqrt{k}}{a}$ seu $s = 8\sqrt{kv}$, quo posito prodit $l\frac{s}{2f} = -1$, seu $s = \frac{2f}{e} = CO$ denotante e numerum, cuius logarithmus est $= 1$. His igitur casibus, quibus arcus descensus est realis, nullus est arcus ascensus. At si corpus per arcum CN celeritate initiali in C altitudini b debita ascendat, motus

302 CAPUT TERTIVM DE MOTV PVNCTI

hac aequatione exprimeretur $l \frac{4\sqrt{kv}+s}{4\sqrt{kb}} = \frac{-s}{4\sqrt{kv}+s}$, ex qua patet esse $s + 4\sqrt{kv} < 4\sqrt{kb}$ et $\sqrt{v} < \sqrt{b} \frac{s}{4\sqrt{k}}$. Totus arcus ascensus CN reperitur faciendo $v=0$, tumque erit $l \frac{s}{4\sqrt{kb}} = -1$, seu $CN = \frac{4\sqrt{kb}}{e}$. Si est $k < \frac{a}{8g}$, quem casum iam tractauimus, resistentia adhuc fit maior, quamobrem multo magis celeritas in C erit $=0$, si quidem descensus ex puncto dato fiat; atque pro data celeritate in C initium descensus erit imaginarium. Quamobrem aequatio quam pro descensu dedimus est imaginaria, nisi constans determinetur ex dato descensus initio. Sit igitur arcus $CE=f$, erit $lC = l g a f^2 \sqrt{k} - \frac{a}{\sqrt{(a^2-8gak)}} l \frac{a-\sqrt{(a^2-8gak)}}{a+\sqrt{(a^2-8gak)}}$ factoque $s=0$ erit $l \frac{e f^2}{a^2} = \frac{a}{\sqrt{(a^2-8gak)}} l \frac{a-\sqrt{(a^2-8gak)}}{a+\sqrt{(a^2-8gak)}}$ si v non esset $=0$, nam si v est $=0$ haec aequatio non valet. Apparet autem hanc aequationem contradictionem continere, quia av inaius esse deberet quam gff seu $v > \frac{gss}{a}$ posito s pro f . At est $\frac{ss}{a} = 2x$ atque ita esset $v > 2gx$, quod est absurdum, nam in vacuo est tantum $v=gx$, atque in medio resistente adhuc minor esse debet. Pro ascensu autem inferuit aequatio inuenta atque ex ea totus arcus ascensus CN reperitur faciendo $v=0$, quo posito prodit $\frac{as^2}{2ab} = (\frac{a-\sqrt{(a^2-8gak)}}{a+\sqrt{(a^2-8gak)}}) \frac{a}{\sqrt{(a^2-8gak)}} = \frac{e \cdot CQ}{b}$. Ex his igitur perspicitur si fuerit vel $k < \frac{a}{8g}$ vel $k = \frac{a}{8g}$ oscillationes peragi non posse, quia post nullum descensum ascensus sequi potest. Quare nobis potissimum reliqui casus, quibus est $k > \frac{a}{8g}$, sunt inuesti-

uestigandi; quia enim in his resistentia est minor, atque quantumvis parua assumi potest, oscillationes utique perfici poterunt. Factis ergo superioribus substitutionibus habemus

$$\frac{-ds}{s} = \frac{p dp}{p^2 - \frac{a}{2k}p + \frac{g a}{2k}}$$

quae aequatio posito $q = p - \frac{a}{4k}$ abit in hanc $\frac{-ds}{s}$

$$= \frac{q dq + \frac{adq}{4k}}{q^2 + \frac{g a}{2k} - \frac{a^2}{16k^2}}. \text{ Ponatur } \frac{g a}{2k} - \frac{a^2}{16k^2} = B^2, \text{ quia}$$

est quantitas affirmatiua, eritque $lC - ls = lV(q^2 + B^2) + \frac{a}{4k} \int \frac{dq}{q^2 + B^2} = lV(q^2 + B^2) + \frac{a}{4Bk} \text{At. } \frac{q}{B}$, ubi $\text{At. } \frac{q}{B}$ est arcus circuli cuius tangens est $\frac{q}{B}$ existente sinu toto = 1. Restituto autem pro q

valore debito erit $lC = lV(2av\sqrt{k} - as\sqrt{v} + gs^2\sqrt{k}) + \frac{a}{4Bk} \text{At. } \frac{4avkv - as}{4Bks}$. Ponatur ad lC definiendum $s = 0$ et $v = b$, erit $lC = lV 2ab\sqrt{k} +$

$$\frac{a}{4Bk} \text{At. } \infty, \text{ quare erit } l \frac{\sqrt{2ab\sqrt{k}}}{\sqrt{(2av\sqrt{k} - as\sqrt{v} + gs^2\sqrt{k})}} = -\frac{a}{4Bk} \text{At. } \frac{4Bks}{4a\sqrt{kv} - as}.$$

Pro ascensu vero per arcum CN inuenitur $l \frac{\sqrt{2ab\sqrt{k}}}{\sqrt{(2av\sqrt{k} + as\sqrt{v} + gs^2\sqrt{k})}} = \frac{a}{4Bk} \text{At. } \frac{4Bks}{4a\sqrt{kv} + as}.$

Posito nunc $v = 0$ prodit integer arcus descensus MC ex hac aequatione $lV \frac{2ab}{gss} = \frac{a}{4Bk} \text{At. } \frac{4Bk}{a} = lV \frac{b}{g.CP}.$ Atque totus arcus ascensus CN inuenietur ex hac aequatione

$$lV \frac{2ab}{gss} = \frac{a}{4Bk} \text{At. } \frac{4Bk}{a} = lV \frac{b}{g.CQ}.$$

Ex his aequationibus quanquam videantur arcus ascensus et descensus inter se aequales, tamen sunt inaequales; dantur enim infiniti arcus quorum tangens est eadem $\frac{4Bk}{a}$, atque pro ascensu alius accipi debet alius prodescensu. Atque

cum

cum infiniti dentur arcus tangentis $\frac{4Bk}{a}$, quilibet eorum ad propositum accommodari potest. His enim sumtis arcubus in ordine prodeunt successiue omnes arcus tam ascensus quam descensus, quam diu corpus oscillationes peragit; nam quia aequatio inuenta est generalis ea omnia loca ostendere debet, in quibus corporis oscillantis celeritas vnquam est $= 0$. Quare in hac resistentiae hypothese hoc habetur commodum, quod statim pro qualibet oscillatione centesima v. gr. arcus tam descensus quam ascensus possit definiri. Sit arcus D cuius tangens est $\frac{4Bk}{a}$, et posita ratione diametri ad peripheriam $1:\pi$, erit eadem tangens $\frac{4Bk}{a}$ omnium horum arcuum D ; $\pi + D$; $2\pi + D$; $3\pi + D$; etc. Pro arcu descensus nunc primae oscillationis MC sumi debet arcus D , eritque $\frac{2ab}{gs^2} = e^{\frac{Da}{2Bk}}$ seu abscissa arcus $MC = \frac{b}{g} e^{\frac{-Da}{2Bk}}$. Abscissa autem arcus ascensus sequentis seu abscissa arcus descensus secundae semioscillationis erit $\frac{b}{g} e^{\frac{-a(\pi+D)}{2Bk}}$. Simili modo abscissa arcus descensus in tertia semioscillatione erit $= \frac{b}{g} e^{\frac{-a(2\pi+D)}{2Bk}}$. Atque generaliter abscissa arcus descensus in oscillatione quae indicatur per $n+1$ est $\frac{b}{g} e^{\frac{-a(n\pi+D)}{2Bk}}$, quae simul est abscissa arcus ascensus in oscillatione quae indicatur numero n . Quod ad tempora oscillationum attinet, ea sequenti propositioni reservamus. Q.E.I.

Corollarium I.

574. Nisi ergo fuerit $k > \frac{a}{8g}$, oscillationes absolui non possunt; quia finito primo descensu corpus ad quietem redigitur, si vel $k < \frac{a}{8g}$ vel $k = \frac{a}{8g}$. At si $k > \frac{a}{8g}$ oscillationes perpetuo durabunt, quia expressio $\frac{b}{g} e^{\frac{-a(n\pi+D)}{2Bk}}$ neque euanescere neque negatiua fieri potest.

Corollarium 2.

575. Arcus descensus se habet ad arcum sequentem ascensus in data ratione; est enim abscissarum ratio $\frac{b}{g} e^{\frac{-Da}{2Bk}}$ ad $\frac{b}{g} e^{\frac{-a(\pi+D)}{2Bk}}$, ideoque ipsorum arcuum 1 ad $e^{\frac{-\pi a}{4Bk}}$, quae ratio non pendet a celeritate data \sqrt{b} .

Corollarium 3.

576. Atque simili modo arcus descensus primae semioscillationis ad arcum ascensus semioscillationis numero n indicatae datam habet rationem, est enim haec ratio vt $e^{\frac{\pi n a}{4Bk}}$ ad 1. Quare si numerus semioscillationum duplo fit maior haec ratio fit duplicata.

Corollarium 4.

577. Arcus descensus quotcunque semioscillationum se insequentium constituunt progressionem geometricam decrecentem in ratione 1 ad $e^{\frac{-\pi a}{4Bk}}$. Atque ideo integri etiam arcus semioscillationibus de-

Tom. II.

Qq _

scripti

scripti erunt in progressionē geometrica eiusdem denominatoris.

Scholion I.

578. Quia autem pro D infiniti arcus accipi possunt, quo appareat quinam ex iis pro arcu descensus accipi debeat; sumo casum quo $k = \frac{a}{8g}$, atque arcus ascensus $= \frac{4\sqrt{kb}}{e}$; seu eius abscissa $= \frac{8kb}{ae^2} = \frac{b}{g} e^{-2}$. Hoc autem casu est $B=0$ atque abscissa arcus ascensus $= \frac{b}{g} e^{\frac{-a(\pi+D)}{2Bk}}$. Debet ergo esse $\frac{a(\pi+D)}{2Bk} = 2$ et $\pi + D = \frac{4Bk}{a} = 0$. Est vero $\frac{4Bk}{a}$ tangens arcus $\pi + D$, et cum $\frac{4Bk}{a}$ sit $= 0$, debet $\pi + D$ esse $= 0$. Ex quo intelligitur $\pi + D$ esse minimum arcum tangenti $\frac{4Bk}{a}$ respondentem. Dicatur ergo minimus arcus tangenti $\frac{4Bk}{a}$ respondens E , erit $D = E - \pi$. Quocirca in prima semioscillatione erit abscissa arcus descensus $= \frac{b}{g} e^{\frac{a(\pi-E)}{2Bk}} = \frac{MC^2}{2a}$, ideoque ipse arcus $MC = e^{\frac{a(\pi-E)}{4Bk}} \sqrt{\frac{2ab}{g}}$. Ponatur $\frac{4Bk}{a}$ seu tangens arcus $E = \tau$, erit arcus descensus primae semioscillationis $= e^{\frac{\pi-E}{\tau}} \sqrt{\frac{2ab}{g}}$. Arcus ascensus primae seu arcus descensus secundae semioscillationis $= e^{\frac{-E}{\tau}} \sqrt{\frac{2ab}{g}}$. Atque arcus descensus in semioscillatione quae indicatur numero $n + 1$ erit $= e^{\frac{-E-(n+1)\pi}{\tau}} \sqrt{\frac{2ab}{g}}$, qui est simul arcus ascensus in semioscillatione numero n indicata. Progressionis geometricae ergo, quam hi arcus ascensus constituunt, denominator est $e^{\frac{-\pi}{\tau}}$.

Co-

Corollarium 5.

579. Ex his etiam in qualibet semioscillatione celeritas in puncto infimo C potest definiri. Sit enim in semioscillatione, quae numero n indicatur, celeritas in C debita altitudini β , erit arcus ascensus $= e^{\frac{-E}{\tau}} \sqrt{\frac{2ab}{g}}$, qui aequalis esse debet ipsi $e^{\frac{-E-(n-1)\pi}{\tau}} \sqrt{\frac{2ab}{g}}$. Hinc fit $\sqrt{\beta} = e^{\frac{-(n-1)\pi}{\tau}} \sqrt{b}$. Celeritates ergo in puncto C in semioscillationibus successivis progressionem geometricam quoque constituunt cuius denominator est $e^{\frac{-\pi}{\tau}}$.

Corollarium 6.

580. Si n ponatur numerus negativus semioscillationes, quae ante primam factae esse possent, cognoscuntur. Vt in semioscillatione primam praecedente arcus descensus esse debuisset $= e^{\frac{2\pi-E}{\tau}} \sqrt{\frac{2ab}{g}}$.

Corollarium 7.

581. Si in prima semioscillatione descensus fiat ex puncto cycloidis supremo A, erit arcus descensus $= a$. Quare est $\sqrt{\frac{ag}{2b}} = e^{\frac{\pi-E}{\tau}}$ et celeritas in puncto infimo C seu \sqrt{b} erit $e^{\frac{E-\pi}{\tau}} \sqrt{\frac{ga}{2}}$.

Corollarium 8.

582. Si resistentia fere evanescat, seu k fuerit quantitas vehementer magna erit $B = \sqrt{\frac{ga}{2k}}$ et

$$Qq = 2$$

$$\tau =$$

$\tau = \frac{4\sqrt{gk}}{\sqrt{2a}} = \frac{2\sqrt{2gk}}{\sqrt{a}}$. Cum igitur sit τ valde magnum erit $E = \frac{\pi}{2}$, atque arcus descensus primae semi-oscillationis $= e^{\frac{\pi}{2\tau}} \sqrt{\frac{2ab}{g}} = (1 + \frac{\pi}{2\tau}) \sqrt{\frac{2ab}{g}}$ et arcus ascensus $= (1 - \frac{\pi}{2\tau}) \sqrt{\frac{2ab}{g}}$.

Scholion 2.

583. Ex solutione huius propositionis inter cetera intelligi potest, quanta circumspectione saepe opus sit ad conclusiones ex aequationibus deducendas. Nam in casu $k > \frac{a}{8g}$, aequationes quas pro descensu et ascensu inuenimus ita sunt comparatae, vt ex iis sequi videatur arcum ascensus aequalem esse arcui descensus; nam facto $v=0$ ex vtraque aequatione prodit $\frac{gs^2}{2ab} = \left(\frac{a - \sqrt{a^2 - 8gak}}{a + \sqrt{a^2 - 8gak}} \right) \frac{a}{\sqrt{a^2 - 8gak}}$. Atque hoc ita se quoque haberet, nisi descensus necessario faceret $b=0$. Posito autem $b=0$, nullus datur ascensus et aequatio pro descensu prorsus est immutanda. Quare nisi ex casu quo $k = \frac{a}{8g}$ aduertissemus b esse $=0$, difficulter ex aequatione veritas cognosci potuisset. Idem quoque accidit, vbi in eadem hypothesi $k < \frac{a}{8g}$ descensu ex dato puncto facto celeritatem in puncto C inuestigauimus, posito enim $s=0$, aequatio ad absurdum deduxit. Ita enim est comparata illa aequatio, vt facto $s=0$ non ostendat esse quoque $v=0$, etiamsi reuera sit $v=0$; ii enim tantum termini sunt neglecti, in quibus reperiebatur s , cum reliqui v continentes eodem iure negligi

negligi debuissent. Inueniri ergo non potest esse $v=0$ si $s=0$, sed quia ex aequatione absurdum sequitur, nisi esset $v=0$, ex hoc concludi potest esse $v=0$ si $s=0$. In aliis vero casibus, in quibus absurdum non tam facile perspicitur, difficulter lapsus euitari poterit.

PROPOSITIO 66.

Theorema.

584. *In medio uniformi, quod resistit in simplici celeritatum ratione, omnes descensus super cycloide AMC fiunt aequalibus temporibus: atque similiter etiam omnes ascensus super cycloide CNB aequalibus temporibus absoluntur; si quidem potentia sollicitans fuerit uniformis et deorsum directa.*

Tab. XIII.
Fig. 1.

Demonstratio.

Pro descensu si dicatur arcus $CM=s$ et altitudo debita celeritati in M , v , habetur ista aequatio $dv = -\frac{gsds}{a} + \frac{ds\sqrt{v}}{\sqrt{R}}$. Ponatur $\forall v=u$, erit u vt ipsa celeritas in M ; atque ob $dv=2u du$ habetur ista aequatio $2u du = -\frac{gsds}{a} + \frac{uds}{\sqrt{R}}$, in qua u et s vbique eundem tenent dimensionum numerum. Quare si ponatur initium descensus in E et arcus $CE=f$, et integretur aequatio proposita ita vt fiat $u=0$ posito $s=f$, prodibit aequatio integralis in qua u , f et s vbique eundem dimensionum numerum constituunt. Ex hac igitur aequa-

bitur u functioni vnius dimensionis ipsarum f et s . Quocirca elementum temporis $\frac{ds}{u}$ erit functio nullius dimensionis ipsarum f , s atque elementi ds . Eius ergo integrale ita acceptum vt euanescat posito $s=0$, erit functio quoque nullius dimensionis ipsarum f et s , et exhibebit tempus per arcum CM. In hac igitur functione si ponatur $s=f$, euanesceat f vbique ex ea functione, aequabiturque tempus totius descensus per EC functioni ex quantitatibus constantibus g , a et k tantum compositae, in quam neque f neque alia quantitas punctum E respiciens ingredietur. Quamobrem tempus descensus per EC eadem exprimitur quantitate, vbicumque punctum E accipiat, atque ideo omnes descensus aequalibus absoluentur temporibus. Si in formula tempus descensus exhibente ponatur $-\sqrt{k}$ loco \sqrt{k} prodibit tempus ascensus in arcu CNB, quod propterea quoque erit constans, quantuscunque fuerit arcus ascensu percursus. Q. E. D.

Corollarium I.

585. Quia u aequalis est functioni vnius dimensionis ipsarum f et s aequabitur $\frac{u}{f}$ functioni nullius dimensionis ipsarum f et s . Quare si ponatur $s=nf$ aequabitur $\frac{u}{f}$ quantitati constanti, in qua non inherit f . In variis ergo descensibus celeritates in punctis homologis totorum arcuum, erunt ipsis arcubus f proportionales.

Co-

Corollarium 2.

586. Cum in descensu maxima celeritas sit ubi est $u = \frac{gs\sqrt{k}}{a}$, inuenietur punctum O seu arcus CO ex aequatione in qua f et s vbique eundem dimensionum numerum constituunt; ex qua ergo erit s seu CO ipsi f proportionalis. In pluribus ergo descensibus tam maximae celeritates ipsae, quam arcus CO arcubus descensuum totis erunt proportionales.

Corollarium 3.

587. Quia tempus per MC aequale est functioni nullius dimensionis ipsarum f et s ; tempus quoque per EM aequabitur functioni nullius dimensionis ipsarum f et s , seu etiam ipsius f et arcus EM.

Corollarium 4.

588. Hinc consequitur non solum tempora integrorum descensuum, sed etiam tempora descensuum per partes similes arcuum totorum esse inter se aequalia. Similique modo hoc locum habet in ascensibus.

Corollarium 5.

589. Cum igitur tam omnes descensus sint isochroni quam omnes ascensus; etiam omnes semioscillationes aequalibus absoluentur temporibus. Atque in casu $k > \frac{a}{8g}$, quo corpus perpetuo oscil-

oscillationes continuat, omnes absoluentur temporibus aequalibus.

Corollarium 6.

590. Cyclois ergo, quae est curua tautochrona in vacuo, eandem proprietatem retinet in medio quod resistit in simplici ratione celeritatum. Praeterea cyclois quoque tautochronismum obtinet in medio, cuius resistantia est constans, seu momentis temporum, vt *Newtonus* loquitur, proportionalis. (570.)

Scholion I.

591. Hunc triplicem cycloidis tautochronismum *Newtonus* quoque demonstravit in Princ. Phil. atque quod ad resistantiam ipsis celeritatibus proportionalem attinet, ex hoc demonstrationem formavit, quod in diuersis descensibus, si arcuum partes totis arcubus proportionales accipiantur, in iis locis celeritates sint totis arcubus quoque proportionales. Nam si celeritates totis arcubus fuerint proportionales, si elementa quoque capiantur totis arcubus proportionalia, tempora per ea erunt inter se aequalia.

Scholion 2.

592. Etsi autem ex his appareat, tempora tam ascensuum quam descensuum inter se esse aequalia, tamen determinari non potest, quantum sit tempus siue descensuum siue ascensuum neque
etiam

etiam tempora descensuum et ascensuum inter se possunt comparari. Aequatio enim relationem inter s et u definiens ita est complicata, vt ex ea elementum temporis $\frac{ds}{u}$, per vnica[m] variabilem non possit exprimi. Praeterea oscillationes infinite paruae, quae ante in determinandis temporibus calculum valde facilem reddiderunt, in hac resistentiae hypothesi nihil adiuuant. Nam etiam si arcus totus descriptus ponatur infinite paruus, in aequatione $l \frac{\sqrt{2ac^2\sqrt{k}}}{\sqrt{(2au^2\sqrt{k}-aus+gss\sqrt{k})}} = \frac{a}{4Bk} A. t. \frac{4Bks}{as-4au\sqrt{k}}$ quae ex superiori integrata oritur, ne vnicus terminus euanescit prae ceteris. Pendebit autem tempus ascensus a quantitatibus a , k et g , at quomodo ex his sit compositum non liquet. Interim tamen hoc certum est, quo maior sit g ceteris paribus, minus esse tempus, at crescente a tempus quoque crescere; k vero crescente diminui, quia resistentia fit minor. In hac igitur resistentiae hypothesi resistentia in motibus tardissimis non euanescit, quemadmodum in resistentia quadratis celeritatum proportionali. Ex quo consequi videtur, si resistentia in maiore quam duplicata celeritatum ratione crescat, in motibus tardissimis resistentiam neglegi posse; at si resistentia fuerit in minore ratione, etiam in motibus tardissimis resistentiam considerari debere.

PROPOSITIO 67.

Problema.

Tab. XIII.

Fig. I.

593. In medio uniformi, quod resistit in ratione multiplicata celeritatum, cuius exponens est $2m$, determinare motum corporis super curua CMA, in qua arcus quisque CM proportionalis est potestati abscissae CP, cuius exponens est $1-m$.

Solutio.

Positis abscissa CP = x et arcu CM = s erit
 $ds = \frac{a^m dx}{x^m}$. Sit celeritas in M debita altitudini

v , erit resistentia in M = $\frac{v^m}{k^m}$; atque ideo si corpus descendere ponatur super arcu CM habebitur

ista aequatio $dv = -g dx + \frac{a^m v^m dx}{k^m x^m}$. Pro ascensu autem super eadem curua inferuit ista aequatio: $dv = -g dx - \frac{a^m v^m dx}{k^m x^m}$. Vtraque vero aequatio

separationem admittet, si ponatur $v = tx$; prodibit enim pro descensu $x dt = -t dx - g dx + \frac{a^m t^m dx}{k^m}$

seu $\frac{-k^m dt}{k^m(g+t) - a^m t^m} = \frac{dx}{x}$, atq; pro ascensu haec aequatio

$\frac{-k^m dt}{k^m(g-t) + a^m t^m} = \frac{dx}{x}$. In quibus aequationibus

variabiles t et x a se inuicem sunt separatae; ita

vt t per x ope quadraturarum possit determinari. Constans in integratione addenda definiri debet vel ex data celeritate in puncto C vel ex loco curvae in quo vel descensus incipit vel ascensus finitur. Si ponatur abscissa toti arcui descensus vel ascensus respondens f ; aequalis erit v functioni unius dimensionis ipsarum f et x tam in descensu quam ascensu propter aequationes differentiales homogeneas. Hanc ob rem \sqrt{v} aequabitur functioni dimidiaae dimensionis ipsarum f et x . Tempus igitur descensus per MC, quod est \equiv

$\frac{ds}{\sqrt{v}} = a^m \int \frac{dx}{x^m \sqrt{v}}$ aequale erit functioni $\frac{1}{2} - m$ dimensionum ipsarum f et x . Quia autem posito $x = f$ prodit tempus totius descensus vt $f^{\frac{1}{2}-m}$; cui etiam proportionale est tempus totius ascensus, si quidem f abscissam arcus totius ascensus designat. Si ponatur totus arcus vel descensus vel ascensus $\equiv A$, quia est A vt f^{1-m} , erit tempus totum vel ascensus vel descensus vt $\frac{A}{f^{\frac{1}{2}}}$ vel vt $A^{\frac{1-2m}{2-2m}}$

Plurium ergo descensuum tempora sunt in ratione $\frac{1-2m}{2-2m}$ multiplicata totorum arcuum descriptorum. Atque in eadem ratione sunt quoque tempora ascensuum inter se; sed tempora ascensuum et descensuum inter se non comparantur. Q.E.I.

Corollarium I.

594. Quia celeritas seu \sqrt{v} aequalis est functioni dimidiaae dimensionis ipsarum f et x ; in

Rr 2

pluri-

316 CAPUT TERTIUM DE MOTU PUNCTI

pluribus descensibus celeritates in puncto C acquisite sunt in subduplicata ratione altitudinum, ex quibus corpus descendit. Atque altitudines, ad quas corpus ascendens pertingit, sunt in duplicata ratione celeritatum initialium in C.

Corollarium 2.

595. Cum tam tempora descensus quam ascensus sint ut $\int \frac{1}{2} - m$; omnes descensus aequalibus absolventur temporibus, si fuerit $m = \frac{1}{2}$ seu resistentia ipsis celeritatibus proportionalis. Atque hac hypothese pariter tempora ascensuum inter se erunt aequalia. Curua autem erit cyclois, ut ante ostendimus.

Corollarium 3.

596. Quia est $ds = \frac{a^m dx}{x^m}$ erit $s = \frac{a^m x^{1-m}}{1-m}$

Ex quo perspicitur, nisi sit $m < 1$, curuam AMC fore negativam seu quod perinde est imaginariam. Semper enim curua maior esse debet quam abscissa.

Corollarium 4.

597. Praeterea semper debet esse $ds > dx$; quare quo hoc accadat si $x=0$ debet m esse numerus positivus. Hinc nostra propositio requirit ut m inter limites 0 et 1 contineatur.

Co-

Corollarium 5.

598. In his casibus maximus ipsius x valor erit a ; ibique erit $ds = dx$, seu tangens verticalis. Hocque loco curua habebit cuspidem, altius enim ascendere nequit, quia si $x > a$, foret $ds < dx$, quod fieri nequit.

Corollarium 6.

599. Si m continetur intra limites 0 et 1, curua in C habebit tangentem horizontalem, atque radius osculi in C erit $= \frac{s ds}{dx} = \frac{a^{2m} x^{1-2m}}{1-m}$.
posito $x = 0$. Quare radius osculi in C erit infinite parvus si $m < \frac{1}{2}$ finitus si $m = \frac{1}{2}$ et infinite magnus si $m > \frac{1}{2}$.

Corollarium 7.

600. Tempora minimorum descensuum et ascensuum sunt infinite parua, si $m < \frac{1}{2}$, at finita si $m = \frac{1}{2}$. Infinite magna denique erunt, si $m > \frac{1}{2}$. Tenent ergo radiorum osculi in infimo puncto C rationem.

Scholion.

601. Habemus hic ergo exempla curuarum pro resistentia minorem quam duplicatam rationem celeritatum tenente, super quibus motus corporis potest determinari. At si medium in ma-

iore quam duplicata ratione resistit, curua nusquam habebit tangentem horizontalem, atque ideo descensus et ascensus nunquam fini possunt. Quo autem in exemplo appareat, qualis sit motus corporis in medio, quod in maiore quam duplicata ratione celeritatum resistit, inuestigare lubet motum corporis super cycloide saltem in medio, quod resistit in quadruplicata ratione celeritatum. Hanc vero resistentiae hypothesin prae aliis eligo, quia in ea celeritas commode per seriem potest definiri.

PROPOSITIO 68.

Problema.

Tab. XIII.

Fig. 1.

602. *In medio vniformi, quod resistit in quadruplicata ratione celeritatum, determinare tam descensum quam ascensum corporis quemcunque super cycloide ACB.*

Solutio.

Posita potentia vniformi corpus perpetuo deorsum trahente g , et abscissa $CP = x$, et arcu $CM = s$, erit ex natura cycloidis $dx = \frac{sds}{a}$. Sit celeritas in C debita altitudini b , et in M altitudini v ; atque exponens resistentiae k , erit resistentia in $M = \frac{v^2}{k^2}$. Pro descensu ergo habebitur haec aequatio $dv = -gdx + \frac{v^2ds}{k^2} = -\frac{gsds}{a} + \frac{v^2ds}{k^2}$; at pro ascensu ista: $dv = -\frac{gsds}{a} - \frac{v^2ds}{k^2}$. Pro descensu po-

ponatur $v = \frac{-k^2 dz}{z ds}$; erit $dv = \frac{-k^2 d dz}{z ds} + \frac{k^2 dz^2}{z^2 ds}$ posito ds constante. Quamobrem habebitur $k^2 d dz = \frac{z ds ds^2}{a}$; quae aequatio in seriem conuerfa dat $z = f + bs + \frac{f g s^3}{2 \cdot 3 a k^2} + \frac{b s^4}{3 \cdot 4 a k^2} + \frac{f g^2 s^5}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 a^2 k^4} + \frac{b g^2 s^7}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 a^2 k^4} + \frac{f g^3 s^9}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 a^3 k^6} + \text{etc.}$ Ad constantes f et b determinandas quaeratur valor ipsius v posito $s=0$; erit ergo $b = -\frac{k^2 b}{f}$. Et quia si $s=0$ est $dv = \frac{v^2 ds}{k^2} = \frac{b^2 ds}{k^2}$, propter $dv = \frac{-k^2 d dz}{z ds} + \frac{k^2 dz^2}{z^2 ds}$, erit $\frac{b^2}{k^2} = \frac{k^2 b^2}{f f}$ quae aequatio cum illa congruit erit ergo $b = -\frac{b f}{k^2}$. Hoc substituto erit $v =$

$$b - \frac{g s^2}{2 a} + \frac{b g s^3}{3 a k^2} - \frac{g^2 s^5}{2 \cdot 3 \cdot 5 a^2 k^2} + \frac{b g^2 s^6}{3 \cdot 4 \cdot 6 a^2 k^4} + \text{etc.}$$

$$1 - \frac{b s}{k^2} + \frac{g s^2}{2 \cdot 3 a k^2} - \frac{b g s^4}{3 \cdot 4 a k^4} + \frac{g^2 s^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 a^2 k^4} + \text{etc.}$$

Pro ascensu vero posito $-s$ loco s habebitur $v =$

$$b - \frac{g s^2}{2 a} - \frac{b g s^3}{3 a k^2} + \frac{g^2 s^5}{2 \cdot 3 \cdot 5 a^2 k^2} + \frac{b g^2 s^6}{3 \cdot 4 \cdot 6 a^2 k^4} - \text{etc.}$$

$$1 + \frac{b s}{k^2} - \frac{g s^2}{2 \cdot 3 a k^2} - \frac{b g s^4}{3 \cdot 4 a k^4} + \frac{g^2 s^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 a^2 k^4} + \text{etc.}$$

Ex his aequationibus totus arcus vel descensus vel ascensus inuenitur, si ponatur $v=0$, atque valor ipsius s inuestigatur. Vt si k fuerit quantitas valde magna erit arcus descensus qui fit $E = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} + \frac{8ab^2}{15 g k^2} + \frac{17 a^2 b^4 \sqrt{g}}{25 g^2 k^4 \sqrt{2ab}} + \text{etc.}$ At sequens arcus ascensus qui fit F erit $= \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} - \frac{8ab^2}{15 g k^2} + \frac{17 a^2 b^4 \sqrt{g}}{25 g^2 k^4 \sqrt{2ab}} - \text{etc.}$
Q. E. I.

Corollarium I.

603. Si ergo resistentia est quam minima erit summa arcuum descensus et ascensus seu arcus

cus vna femioscillatione descriptus, i. e. $E+F=\frac{2\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}$, quam proxime.

Corollarium 2.

604. Differentia autem inter arcum ascensus et descensus scilicet $E-F=\frac{16ab^2}{15gk^2}=\frac{g(E+F)^4}{60ak^2}$. Quare differentia inter arcuum descensus et ascensus est vt biquadratum summae arcuum.

Scholion I.

605. Ex his perspicitur in medio rarissimo, quod resistit in quadruplicata ratione celeritatum differentiam inter arcus ascensus et descensus proportionalem esse biquadrato summae arcuum, seu $E-F=\frac{g(E+F)^4}{60ak^2}$. Supra autem vidimus in medio rarissimo, quod in duplicata ratione celeritatum resistit, esse arcum descensus $E=\frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}+\frac{2ab}{3gk}$, et arcum ascensus $F=\frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}-\frac{2ab}{3gk}$; hinc erit $E+F=\frac{2\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}$ et $E-F=\frac{4ab}{3gk}=\frac{(E+F)^4}{6k}$ (557.). Quare in hac resistantia est differentia inter arcus ascensus et descensus vt quadratum summae arcuum. Atque in medio quod in simplici ratione celeritatum resistit, si fuerit rarissimum est $E=\frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}+\frac{\pi a\sqrt{b}}{4g\sqrt{k}}$ et $F=\frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}-\frac{\pi a\sqrt{b}}{4g\sqrt{k}}$ (582). Quare erit $E-F=\frac{\pi a\sqrt{b}}{2g\sqrt{k}}=\frac{\pi(E+F)\sqrt{a}}{4\sqrt{2kg}}$. Seu differentia inter arcus descensus et ascensus est ipsi summae arcuum proportionalis.

Ex.

Ex quo consequi videtur in medio quocunque rarissimo, quod resistit in $2m$ multiplicata ratione celeritatum, differentiam inter arcus ascensus et descensus super cycloide proportionalem esse potestati summae arcuum ascensus et descensus, cuius exponens sit $2m$. Atque in hac resistentiae hypothesi coniectare licet, fore arcum descensus

$$E = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m \cdot a b^m}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2m+1) g k^m} \text{ et arcum as-}$$

$$\text{census } F = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} - \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m \cdot a b^m}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2m+1) g k^m}. \text{ Vnde}$$

$$\text{fit } E - F = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m \cdot g^{m-1} (E + F)^{2m}}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2m+1) 2^{2m-1} a^{m-1} k^m}. \text{ Quo-}$$

ties ergo m est numerus integer seu $2m$ numerus par, assignari potest aequatio inter $E - F$ et $E + F$: at si m fuerit numerus fractus valor fractionis $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2m+1)}$ per methodum interpolationem, quam exhibui in Comment. Acad. Petrop. A. 1730, inuestigari potest. Ex qua quidem constat si $2m$ fuerit numerus impar valorem huius fractionis involuere quadraturam circuli, quemadmodum etiam in casu, quo $2m = 1$ reperimus.

Scholion 2.

606. Quod quidem ad ipsam propositionem attinet, esse differentiam inter arcus descensus et ascensus super cycloide in totuplicata ratione summae arcuum, in quotuplicata ratione ce-

Tom. II.

Ss

leri-

leritatum sit resistentia, si quidem fuerit minima *Newtonus* in Princ. demonstravit. Atque demonstrationem etiam ex ipsa aequatione $dv = -\frac{gsds}{a}$

$$+ \frac{v^m ds}{k^m} \text{ derivare licet. Ponatur enim } v = b - \frac{gs^2}{2a} + Q, \text{ ubi } Q \text{ erit quantitas valde parva prae } b \text{ et } \frac{gs^2}{2a}. \text{ Hanc ob rem habebitur } -\frac{gsds}{a} + dQ = -\frac{gsds}{a} + \frac{(b - \frac{gs^2}{2a})^m ds}{k^m} \text{ pro descensu seu } Q = \int \frac{(2ab - gs^2)^m ds}{(2ak)^m}$$

hoc integrali ita accepto ut evanescat posito $s=0$.

$$\text{Pro descensu ergo erit } v = b - \frac{gs^2}{2a} + \int \frac{(2ab - gs^2)^m ds}{(2ak)^m}$$

$$\text{et pro ascensu } v = b - \frac{gs^2}{2a} - \int \frac{(2ab - gs^2)^m ds}{(2ak)^m}.$$

$$\text{Ponatur } v=0, \text{ et quia tunc proxime est } s = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}, \text{ ponatur } s = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} + q, \text{ erit } 0 = -\frac{gq\sqrt{2ab}}{a\sqrt{g}} - \int \frac{(2ab - gss)^m ds}{(2ak)^m}, \text{ atque } q = \sqrt{\frac{a}{2gb}} \int \frac{(2ab - gss)^m ds}{(2ak)^m}$$

si quidem post integrationem ponatur $s = \sqrt{\frac{2ab}{g}}$. At quia in hoc ipsius q valore ipsarum \sqrt{b} et s sunt 2^m dimensiones habebit q huiusmodi formam Nb^m .

$$\text{Quocirca erit arcus descensus } E = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} + Nb^m \text{ et arcus ascensus } F = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} - Nb^m. \text{ Hinc ergo ha-}$$

$$\text{babitur } E - F = 2Nb^m = \frac{Ng^m(E+F)^{2m}}{2^{3m-1}a^m}. \text{ At nu-}$$

$$\text{merus } N \text{ obtinebitur ex formula } \sqrt{\frac{a}{2gb}} \int \left(\frac{2ab - gss}{2abk}\right)^m ds$$

si post integrationem ponatur $s = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}$. Atque haec est demonstratio illius ipsius, quod in praecedente scholio ex inductione deriuabamus. Erit enim N numerus rationalis, quoties m fuerit numerus integer affirmatiuus; at si $2m$ fuerit numerus integer impar inuentio numeri N a quadratura circuli pendeat. Generaliter autem valor ipsius q cum hac expressione $\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m \cdot a b^m}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2m+1) g k^m}$ congruit.

PROPOSITIO 69.

Problema.

607. In medio, quo resistit in quadruplicata ratione celeritatum, si detur corporis super curua AMC ex dato puncto A . descendens in singulis locis celeritas, inuenire celeritatem eiusdem corporis descensum in quocunque alio puncto E incipientis.

Tab. XIII.

Fig 2.

Solutio.

Posito $CP = x$ et $CM = s$, sit corporis ex A delapsi celeritas in M debita altitudini u , quae quantitas u ergo per hyp. datur per x et s . Iam si corpus descensum ex quocunque puncto E incipiat, sit celeritas in M debita altitudini v . Aequatio vero motum determinans erit $dv = -g dx + \frac{v^2 ds}{k^2}$, quae dat valorem ipsius v vbicunque descensus inceperit; erit ergo etiam $du = -g dx +$

SS 2

$\frac{u^2 ds}{k^2}$

324 CAPUT TERTIUM DE MOTU PUNCTI

$\frac{u^2 ds}{k^2}$. Ponatur $v = u - q$, erit $du - dq = -g dx + \frac{u^2 ds}{k^2} - \frac{2qu ds}{k^2} + \frac{q^2 ds}{k^2}$; ex qua aequatione propter $du = -g dx + \frac{u^2 ds}{k^2}$ oritur $-dq = -\frac{2qu ds}{k^2} + \frac{q^2 ds}{k^2}$ seu $-\frac{dq}{q^2} + \frac{2u ds}{k^2} = \frac{ds}{k^2}$, quae multiplicata per $e^{\frac{2fuds}{k^2}}$ dat

hanc integralem $e^{\frac{2fuds}{k^2}} = c q + q \int e^{\frac{2fuds}{k^2}} \frac{ds}{k^2}$, ex

qua prodit $q = \frac{k^2 e^{\frac{2fuds}{k^2}}}{c + \int e^{\frac{2fuds}{k^2}} ds}$. Quocirca erit $v = u -$

$\frac{k^2 e^{\frac{2fuds}{k^2}}}{c + \int e^{\frac{2fuds}{k^2}} ds}$, in qua aequatione integralia $\int \frac{u ds}{k^2}$ et

$\int e^{\frac{2fuds}{k^2}} ds$ ita sint accepta vt euanescant posito $s = 0$.

Sit nunc altitudo celeritati in C debita $= a$, si descensus ex A fiat; at altitudo celeritati in C debita si descensus ex E fit $= b$; erit $b = a - \frac{k^2}{c}$

Ex quo habebitur $v = u - \frac{(a-b)k^2 e^{\frac{2fuds}{k^2}}}{k^2 + (a-b) \int e^{\frac{2fuds}{k^2}} ds}$. Da-

ta ergo celeritate in C nempe \sqrt{b} inuenietur punctum E, in quo descensus incepit ex hac aequa-

tione $u = \frac{(a-b)k^2 e^{\frac{2fuds}{k^2}}}{k^2 + (a-b) \int e^{\frac{2fuds}{k^2}} ds}$, ex qua valor ipsius s

dabit arcum C M E. Quia igitur datur u per s ex hac aequatione celeritas corporis ex quocun-
que

que alio puncto delapsi super curua AMC inuenietur. Q. E. I.

Corollarium I.

608. Si valor ipsius v ita immutetur vt tam in numeratore quam in denominatore b sine co-

efficiente appareat, prodibit $v = \frac{(u e^{\frac{2fuds}{k^2}} ds - k^2 e^{\frac{2fuds}{k^2}})}{\int e^{\frac{2fuds}{k^2}} ds}$

$$\frac{\left(b - a + \frac{k^2 u}{k^2 e^{\frac{2fuds}{k^2}} - u \int e^{\frac{2fuds}{k^2}} ds}\right)}{\frac{k^2}{\int e^{\frac{2fuds}{k^2}} ds}}. \text{ Atque erit } v = 0$$

$$\left(b - a - \frac{k^2}{\int e^{\frac{2fuds}{k^2}} ds}\right)$$

$$\text{si est } a + \frac{k^2 u}{u \int e^{\frac{2fuds}{k^2}} ds - k^2 e^{\frac{2fuds}{k^2}}} = b.$$

Corollarium 2.

609. Quia est $du - \frac{u^2 ds}{k^2} = -g dx$, erit huius aequationis per $e^{\frac{2fuds}{k^2}}$ multiplicatae integralis haec $u = a e^{\frac{fuds}{k^2}} - g e^{\frac{fuds}{k^2}} \int e^{\frac{-fuds}{k^2}} dx$; integralibus ita sumtis vt euanescant posito s vel $x = 0$. Vel etiam est $\frac{du}{u} + \frac{g dx}{u} = \frac{u ds}{k^2}$, atque hinc $\int \frac{u ds}{k^2} = \int \frac{u}{a} + \int \frac{g dx}{u}$. Quare erit $e^{\frac{fuds}{k^2}} = \frac{\int \frac{g dx}{u}}{a} u$; vnde dx loco ds in aequatione superiore potest introduci.

Corollarium 3.

610. Si resistentia fuerit quam minima, evanescet $\int e^{\frac{2fuds}{k^2}} ds$ prae k^2 ; et ideo erit $v = u - (a-b) e^{\frac{2fuds}{k^2}} = u - (a-b)(1 + 2\int \frac{uds}{k^2})$, propter k quantitatem maximam. Quamobrem erit $v = b + \frac{2bfuds}{k^2} - a - 2\int \frac{uds}{k^2} + u = (1 + \frac{2fu ds}{k^2})(b - a + \frac{u}{1 + \frac{2fuds}{k^2}})$.

Corollarium 4.

611. Cum autem sit $V(1 + \frac{2fuds}{k^2}) = 1 + \frac{fuds}{k^2}$ erit elementum temporis $\frac{ds}{\sqrt{v}} = \frac{k^2 ds}{(k^2 + fuds)V(b - a + \frac{k^2 u}{k^2 + 2fuds})}$. Per aequationem autem $du = -g dx + \frac{u^2 ds}{k^2}$ est quam proxime $u = a - gx + \int \frac{(a-gx)^2 ds}{k^2}$, vnde erit $\int u ds = \int (a - gx) ds$, atque $\frac{ds}{\sqrt{v}} = \frac{k^2 ds}{(k^2 + \int (a - gx) ds) V(b - a + \frac{k^2 a - gk^2 x + \int (a - gx)^2 ds}{k^2 + 2\int (a - gx) ds})}$
 $\frac{(k^2 + \int (a - gx) ds) V(b - a + \frac{k^2 a - gk^2 x + \int (a - gx)^2 ds}{k^2 + 2\int (a - gx) ds})}{(k^2 + \int (a - gx) ds) V(b - \frac{gk^2 x + \int (a^2 - g^2 x^2) ds}{k^2 + 2\int (a - gx) ds})}$

Scholion.

612. Quemadmodum hypothesis resistentiae quadratis celeritatum proportionalis prae aliis hypothesis excepta ea, quae est constans, hanc habet praerogativam, ut corporis super quacunque curva

curua moti celeritas in omnibus locis ex aequatione curuae possit definiri; ita haec resistentiae hypothesis in hoc prae reliquis excellit, quod ex dato vnico descensu vel ascensu, simul omnes descensus et ascensus possint determinari. In aliis enim resistentiis operatio, qua hic vsi sumus, non succedit, neque ad aequationem deducit, in qua indeterminatae a se inuicem separari possunt. Hanc ob rem vti resistentia constans est simplicissima, eamque sequitur ea, quae quadratis celeritatum est proportionalis, ita post has pro simplicissima resistentiae hypothesis est habenda ea, quae fit in quadruplicata ratione celeritatum. Videtur quidem ex his parum commodi ad motum in hac resistentiae hypothesis definiendum obtineri, quia vnus descensus tanquam datus accipitur, qui autem inuentu aequae est difficilis ac quisque alius. At si plures descensus considerantur, et inter se comparantur, aequatio $dv = -gdx + \frac{v^2 ds}{k^2}$ reipsa tres variables implicat, nempe praeter v et s seu x celeritatem in puncto C, quae in variis descensibus variatur. Quare cum resolutionem huius aequationis ad hanc aequationem $du = -gdx + \frac{u^2 ds}{k^2}$ reduxerimus, quae ad vnicum descensum spectat, illud incommodum trium varibilium hoc modo tollitur. Praeterea ope istius artificii plures descensus inter se comparari possunt, quod in aliis resistentiae hypothesis ne quidem fieri potest. Atque hinc etiam multa proble-

blemata inuerfa pro hac refiftentiae hypothefi re-
folu poffunt, quae in aliis omnino tractari ne-
queunt.

PROPOSITIO 70.

Problema.

Tab. XIII.
Fig. 3.

613. *Si refiftentia fuerit quam minima refpectu
potentiae follicitantis abfolutae, et proportionalis po-
teftati cuicunque celeritatum determinare motum cor-
poris fuper quacunque curua AM.*

Solutio.

Descendat corpus fuper curua AM, defcenfus
initio in A existente; ponatur fuper axe verticali ab-
fciffa $AP = x$, arcus $AM = s$; et potentia perpe-
tuo deorfum trahens $= g$. Sit celeritas in M de-

bita altitudini v et refiftentia ibidem $= \frac{v^m}{k^m}$, ita
vt refiftentia fit proportionalis poteftati exponen-
tis $2m$ celeritatum. His pofitis erit $dv = g dx -$
 $\frac{v^m ds}{k^m}$; at quia refiftentia ponitur valde parua, erit

terminus $\frac{v^m ds}{k^m}$ vehementer exiguus, atque pro-
pterea $v = gx$ quam proxime. Subftituatur gx lo-
co v in termino $\frac{v^m ds}{k^m}$ erit $v = gx - \frac{g^m}{k^m} \int x^m ds$
at-

atque simili modo adhuc propius $v = gx - \frac{g^m}{k^m} \int x^m ds$
 $+ \frac{mg^{2m-1}}{k^{2m}} \int x^{m-1} ds \int x^m ds$. Quae integralia ita
 sunt accipienda vt euanescant posito $x=0$. Hinc
 ergo erit $\frac{1}{\sqrt{v}} = \frac{1}{\sqrt{gx}} + \frac{g^m \int x^m ds}{2k^m g x \sqrt{gx}} - \frac{mg^{2m} \int x^{m-1} ds \int x^m ds}{2k^{2m} g^2 x \sqrt{gx}}$
 $+ \frac{3g^{2m} (\int x^m ds)^2}{8k^{2m} g^2 x^2 \sqrt{gx}}$. Atque tempus descensus per

AM erit $= \int \frac{ds}{\sqrt{gx}} + \frac{g^{m-\frac{3}{2}}}{2k^m} \int x^{-\frac{3}{2}} ds \int x^m ds$. q. pr.

At si descensus ad fixum punctum C vsque desi-
 deretur, initio descensus ex puncto E factò, po-
 natur puncti E supra C altitudo verticalis $CD=a$;
 abscissa $CP=x$ et arcus $CM=s$; quibus positis
 hic casus ad superiorem reducetur, si ibi loco x
 ponatur $a-x$ et $-ds$ loco ds . Quare si altitu-
 do celeritati in M debita vocetur v , erit $v=g$

Fig. 2.

$(a-x) + \frac{g^m}{k^m} \int (a-x)^m ds + \frac{mg^{2m-1}}{k^{2m}} \int (a-x)^{m-1} ds$
 $\int (a-x)^m ds$; q.p. Haec vero integralia ita sunt
 accipienda vt euanescant posito $x=a$. Atque
 tempus per arcum EM est $= - \int \frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}} +$
 $\frac{g^{m-\frac{3}{2}}}{2k^m} \int (a-x)^{-\frac{3}{2}} ds \int (a-x)^m ds$. q. pr. vbi iterum

omnia integralia ita sunt capienda, vt euanescant
 posito $x=a$. Simili modo si corpus ex C su-
 per curua CME ascendat tanta celeritate, qua ad

punctum E vsque pertingere possit, eadem aequationes locum habebunt si modo loco k^m ponatur $-k^m$. Hanc ob rem erit $v = g(a-x) - \frac{g^m}{k^m} \int (a-x)^m ds + \frac{mg^{2m-1}}{k^{2m}} \int (a-x)^{m-1} ds \int (a-x)^m ds, q.p.$ atque tempus ascensus per ME $= - \int \frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}} - \frac{g^{m-3}}{2k^m} \int (a-x)^{-\frac{3}{2}} ds \int (a-x)^m ds$ q. pr. omnibus his integralibus quoque ita acceptis, ut evanescant posito $x=a$. Atque hoc modo tam descensus corporis super curua quacunque, quam oscillationes super curua idonea in medio rarissimo poterunt determinari. Q. E. I.

Corollarium I.

Fig. 3.

614. Apparet ex his, quod quidem per se intelligitur, si corpus in medio resistente super curua AM descendat, fore celeritatem in M minorem, quam si corpus in vacuo super eadem curua descendisset. Atque tempus in medio resistente maius est, quam tempus descensus per AM in vacuo.

Corollarium 2.

Fig. 2.

615. Altitudo celeritati in puncto infimo C debita prodibit, si in expressione ipsius v ponatur $x=a$. Hoc autem facto fit $v = ga + \frac{g^m}{k^m} \int (a-x)^m ds$ q. pr. posito post integrationem su-

pra

pra praescripto modo peractam $x=0$. At si $(a-x)^m ds$ ita capiatur vt euanescat posito $x=0$, tum erit in puncto C, $v=g a - \frac{g^m}{k^m} \int (a-x)^m ds$, si post integrationem ponatur $x=a$. Id quod ad descensum pertinet.

Corollarium 3.

616. At pro ascensu celeritas corporis in C qua ad E vsque ascendere valet debita erit altitudini $=g a + \frac{g^m}{k^m} \int (a-x)^m ds$, si hoc integrale ita accipiat ut euanescat posito $x=0$, atque post integrationem ponatur $x=a$.

Corollarium 4.

617. Sit altitudo debita celeritati in $C=b$ quam iam descendendo per EMC acquisiuit, et qua iterum super eadem curua ascendet; ponatur altitudo DC descensu percurfa vt ante a , et altitudo ad quam quam ascensu pertinet $a-d$, erit d quantitas valde parua; atque ideo $b=g a - \frac{g^m}{k^m} \int (a-x)^m ds = g a - g d + \frac{g^m}{k^m} \int (a-x)^m ds$, et $d = \frac{2g^{m-1}}{k^m} \int (a-x)^m ds$. Vel etiam $d = \frac{2ga - 2b}{g}$.

T t 2

Co-

Corollarium 5.

618. Quia tempus descensus per EM est $= - \int \frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}} + \frac{g^{m-\frac{3}{2}}}{2k^m} \int (a-x)^{-\frac{3}{2}} ds \int (a-x)^m ds$ his integralibus ita acceptis vt euanescent posito $x=a$; erit tempus per CM $= \int \frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}} - \frac{g^{m-\frac{3}{2}}}{2k^m} \int (a-x)^{-\frac{3}{2}} ds \int (a-x)^m ds$, si integralia ita accipiantur vt euanescent posito $x=0$. Atque simili modo in ascensu erit tempus per CM $= \int \frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}} + \frac{g^{m-\frac{3}{2}}}{2k^m} \int (a-x)^{-\frac{3}{2}} ds \int (a-x)^m ds$.

Corollarium 6.

619. Integrum ergo tempus vel descensus vel ascensus per CME habebitur, si in his posterioribus formulis ponatur post integrationem $x=a$.

Scholion.

620. Satis iam expositis iis, quae ad motum corporis super data curua inueniendum pertinent, progredior ad quaestiones inuerfas, in quibus ex aliis datis, quae incognita sunt, inueftigantur. Et primum quidem occurrunt huiusmodi problemata, in quibus lex accelerationis seu scala celeritatum datur, et curua quaeritur, quae motum illi scale convenientem producat in medio

dio quocunque resistente; potentiam vero absolutam vt haftenus constantem et deorsum directam assumemus.

PROPOSITIO 71.

Problema.

621. In medio, quod resistit in ratione quacunque multiplicata celeritatum, inuenire curuam AM, super qua corpus ita descendat, vt in singulis punctis M celeritatem habeat debitam altitudini, quae aequalis sit applicatae respondenti PL datae curuae BL.

Tab. XIII.

Fig. 4.

Solutio.

Posita $AP=x$ et $PL=v$ dabitur aequatio inter x et v propter curuam BL datam. Iam sit arcus $AM=s$, et exponens rationis multiplicatae celeritatum $2m$, cui resistentia est proportio-

nalis; quibus positis erit $dv=gdx-\frac{v^m ds}{k^m}$; de-

notante g potentiam vniformem deorsum trahentem et k exponentem resistentiae. Ex hac igitur ae-

quatione est $ds=\frac{gk^m dx-k^m dv}{v^m}$, quae quia v per

x dari ponitur, variables habet a se inuicem separatas, atque idcirco sufficit ad curuam quaesitam AM construendam. At quia ds semper maius esse debet quam dx ; ne curua AM fiat imaginaria, oportet vt sit $gk^m dx-k^m dv > v^m dx$, seu

Tr 3

$dx >$

$dx > \frac{k^m dv}{gk^m - v^m}$. Namque ybi est $dx = \frac{k^m dv}{gk^m - v^m}$ ibi curuae AM tangens fit verticalis; et vbi $dx < \frac{k^m dv}{gk^m - v^m}$, ibi curua AM omnino partem habere nequit. Q. E. I.

Corollarium I.

622. Cum vbi curuae BL tangens est verticalis, fit $dv = 0$, erit in loco respondente curuae AL, $ds = \frac{gk^m dx}{v^m}$, in quo puncto corpus descendens maximam vel minimam habebit celeritatem. Ne igitur hoc curuae AL punctum sit imaginarium, oportet fit $gk^m > v^m$, seu $v < k\sqrt[m]{g}$.

Corollarium 2.

623. Si curua BL alicubi incidat in axem AP, vt ibi fit $v = 0$; erit in loco curuae AM respondente $ds = \infty$; si quidem m fuerit numerus affirmatiuus. Hoc ergo loco curua AM habebit tangentem horizontalem, in quam curua definet.

Corollarium 3.

624. Habeat curua AM alicubi tangentem horizontalem, m euanesct illo loco dx prae ds .

Quamobrem erit $ds = \frac{-k^m dv}{v^m}$. Ex quo apparet

in

in loco curvae BL respondente applicatas decre-
fcere debere, atque ibi curvae BL tangentem fo-
re horizontalem, quia dv infinities quoque ma-
ius erit quam dx .

Corollarium 4.

625. Curvae AM tangens, vt vidimus, est
verticalis, vbi est $dx = \frac{k^m dv}{gk^m - v^m}$. Quo igitur cur-
ua in initio A, vbi celeritas fit nulla, habeat
tangentem verticalem, oportet vt ibi fit $dv =$
 gdx , seu $v = gx$. Hoc ergo casu tangens angu-
li, quem curua BL in A cum AP constituet,
erit $= g$.

Corollarium 5.

626. Cum fit $ds = \frac{gk^m dx - k^m dv}{v^m}$, erit ele-
mentum temporis $\frac{ds}{v} = \frac{gk^m dx - k^m dv}{v^{m+\frac{1}{2}}}$. Quocir-
ca tempus descensus per AM erit $= \frac{2k^m}{(2m-1)v^{m-\frac{1}{2}}}$
 $+ gk^m \int \frac{dx}{v^{m+\frac{1}{2}}}$.

Scholion I.

627. Si curua BL super AB ascenderet,
tum curua AM quoque sursum vergeret; atque
loco descensus problemati satisfaceret ascensus su-
per

per illa curua. Fit enim hoc casu abscissa x negativa ideoque et eius elementum dx ; quamobrem habebitur ista aequatio $ds = \frac{-g k^m dx - k^m dv}{v^m}$

quae oritur ex aequatione $dv = -g dx - \frac{v^m ds}{k^m}$ naturam ascensus continente. Simili modo si curua BL ita est comparata, vt rursus ascendat; tum curua AM quoque sursum dirigetur; et partim descensu partim ascensu conditioni praescriptae satisfaciet.

Exemplum I.

628. Si quaeratur curua AM super qua corpus aequabiliter moueatur celeritate scilicet altitudini b debita; erit BL linea recta parallela axi AP atque $v = b$. Hanc ob rem erit $ds = \frac{g k^m dx}{b^m}$.

Vnde sequitur lineam AM fore rectam inclinatam, et cosinum anguli, quem cum verticali AP constituet fore $= \frac{b^m}{g k^m}$ posito 1 pro sinu toto. Quo igitur maior fuerit b , seu celeritas, qua corpus ferri debet, eo minor erit angulus cum verticali AP, atque si fuerit $b^m = g k^m$, tum linea quaesita ipsa erit verticalis AP. At si b^m maior proponeretur quam $g k^m$, tum solutio perduceret ad imaginarium, ad angulum scilicet, cuius cosinus esset maior

maior sinu toto. Tempus porro, quo lineae portio AM descensu absoluitur, erit $= \frac{g k^m x}{b^m \sqrt{b}} = \frac{s}{\sqrt{b}}$.

Exemplum 2.

629. Quaeratur curua AM super qua corpus ita descendat, vt eius celeritas in singulis punctis sit vt radix quadrata ex altitudine AP, quae est proprietas omni motui in vacuo competens. Erit igitur $v = \alpha x$, et $dv = \alpha dx$; hisque substitutis habebitur $ds = \frac{g k^m dx - \alpha k^m dx}{\alpha^m x^m}$ et $s =$

$\frac{(g - \alpha) k^m x^{1-m}}{(1-m)\alpha^m}$, vbi constantis additione non est

opus si $m < 1$. At si $m = 1$. curua est tractoria super linea horizontali per A transeunte descripta; super qua corpus ab infinita distantia, concursu scilicet tractoriae cum asymtoto, descensum incipit. Simili modo si $m > 1$, curua formam habebit tractoriae similem. Semper autem esse debet $\alpha < g$; ex quo perspicitur corpus in medio resistente non tantam acquirere posse celeritatem quantam in vacuo. Deinde quia ds maius esse debet quam dx , erit $(g - \alpha) k^m > \alpha^m x^m$; corpus igitur profundius descendere nequit, quam per al-

titudinem $= \frac{k}{\alpha} \sqrt[m]{g - \alpha}$; quo loco curuae tangens erit verticalis, curuaque punctum reuerfionis habebit. Tempus autem, quo corpus per arcum

Tom. II.

Uu

AM

$$AM \text{ descendit est } = \int \frac{ds}{\sqrt{\alpha x}} = \frac{2(g-\alpha) k^m x^{\frac{1}{2}-m}}{(1-2\alpha) k^{m+\frac{1}{2}}}.$$

Quare nisi sit $m < \frac{1}{2}$ tempus non potest esse finitum; sed est infinite magnum; nam si $m = \frac{1}{2}$ curva erit cyclois deorsum versa, super cuius vertice A corpus perpetuo permanebit.

Corollarium 6.

630. Perspicitur ergo in medio resistente motum non ultra datum punctum posse continuari, ita ut celeritates semper sint in subduplicata ratione altitudinum.

Corollarium 7.

631. Ex his apparet omnes curvas hoc modo inventas habere in A tangentem horizontalem. Quamdiu ergo radius osculi in A est finitae magnitudinis, corpus nunquam descendet. At si radius osculi sit infinite parvus, quod evenit si $m < \frac{1}{2}$, tum corpus descendere poterit; id quod ex eo, quod tempus sit finitum, intelligitur.

Scholion 2.

632. Si corpus ex A descensum incipiat, atque curvae AM in A tangens non fuerit horizontalis, tum ipso motus initio resistentia est nulla, erit ergo ibi $dv = g dx$. Quamobrem quo loco AM curva prodeat non habens in A tangentem

tem horizontalem, curua BL, quae in A conueniet cum AP, ita debet esse comparata, vt in ipso initio sit $v = gx$; seu tangens curuae BL in A cum axe AP angulum constituere debet, cuius tangens sit $=g$; alioquin enim curua AM non angulum acutum cum AP conficeret. Magis autem descendendo semper esse debet $v < gx$, in medio enim resistente celeritas ex quacunque altitudine acquisita minor est celeritate, quae in vacuo ex eadem altitudine acquiritur. Porro in medio resistente corpus maiorem celeritatem acquirere non potest, quam si per lineam verticalem delaberetur, quia enim linea verticalis est breuissima, et citissime descensu absoluitur, corpus quam minime resistentiae actioni est expositum. Quamobrem in medio resistente curua BL ita debet esse comparata, vt v vbique sit minor, quam altitudo debita celeritati, quae a corpore in eodem medio resistente per AP cadendo acquiritur. Vbi enim v hanc altitudinem superat, ibi curua AM fit imaginaria.

Scholion 3.

633. Simili modo res se habet si pro ascen-
 fu detur curua BLD, cuius applicatae PL sint altitudines debitaes celeritatibus corporis ascendentis super curua inuenienda AME in punctis M. Dictis enim $AP = x$; $PL = v$ et $AM = s$, erit $ds = \frac{-gk^m dx - k^m dv}{v^m}$. Ne igitur ds sit negatiuum,

Tab. XIII.
Fig. 5.

Un 2

opor-

oportet, vt dv habeat valorem negativum, i. e. vt curua BL continuo ad axem AD conuergat. Deinde etiam $-dv$ maius esse debet quam gdx seu tangens curuae BL vbique cum axe AP maiorem angulum constituere debet, quam est is, cuius tangens est $=g$. Neque vero hoc sufficit, sed praeterea $-dv - gdx$ maius esse debet quam $\frac{v^m dx}{k^m}$; seu $-dv > \frac{(gk^m + v^m) dx}{k^m}$, siue differentia inter $-dv$ et gdx maior esse debet quam $\frac{v^m dx}{k^m}$. Haec postrema conditio huc redit, vt

PL sit minor, quam altitudo debita celeritati, quam corpus in P haberet, si ex A celeritate alt. AB debita, per AP ascendisset. In ascensu enim per lineam verticalem corpus pro ratione altitudinis percurvae minimum celeritatis detrimentum a resistentia patitur. In ipso autem puncto D, angulus ADB tantus esse debet vt eius tangens sit $=g$; quia prope punctum E, in quo celeritas est nulla, resistentiae effectus euanesceat: sin vero iste angulus esset maior, curua AME in E tangentem haberet horizontalem, vti in praeced. scholio quoque de descensu monuimus.

PROPOSITIO 72.

Problema.

Tab. XIII.
Fig. 6.

634. Si detur curua AM super qua corpus in vacuo moueatur; inuenire curuam am, super qua corpus

pus in medio resistente ita descendat, ut celeritas in a aequalis sit celeritati in A , et sumtis arcubus AM et am aequalibus, ut celeritates in singulis punctis M et m sint quoque aequales.

Solutio.

Ductis axibus verticalibus AP et ap , et horizontalibus MP , mp ; sit $AM = am = s$; $AP = t$, et $ap = x$; propter curuam AM datam dabitur aequatio inter s et t . Iam sint celeritates in punctis A et a debitae altitudini b , et celeritates in M et m debitae altitudini v . Sit potentia absoluta deorsum sollicitans g , et resistentia ut potestas exponentis $2m$ celeritatum. His positis erit pro motu in vacuo super curua AM , $dv = -gdt$, seu $v = b - gt$; et pro descensu in medio resistente super curua ma erit $dv = -gdx + \frac{v^m ds}{k^m}$; in qua aequatione si loco dv et v substituantur valores ex priori aequatione inuenti, prodibit $-gdt = -gdx + \frac{(b - gt)^m ds}{k^m}$; seu $dx = dt + \frac{(b - gt)^m ds}{gk^m}$. Quia autem datur aequatio inter t et s ; si loco t eius valor in s substituatur, habebitur aequatio inter x et s pro curua quaesita am . Q. E. I.

Corollarium I.

635. Si in curua AM punctum B fuerit initium descensus, ideoque eius altitudo supra $A = \frac{b}{g}$; habebitur quoque in curua am initium descensus b , fumendo arcum $amb = AMB$.

Corollarium 2.

636. Ex solutione apparet esse semper $dx > dt$: quare altitudo ap maior erit quam altitudo AP ; in medio enim resistente maiore opus est altitudine ad eandem celeritatem generandam quam in vacuo.

Corollarium 3.

637. Quia in curvis AM et am sumtis aequalibus arcubus, celeritates in illis locis sunt aequales; tempora quoque, quibus aequales arcus AM et am describuntur, erunt aequalia. Atque ideo tempus descensus in medio resistente per bma aequale est tempori descensus in vacuo per BMA .

Corollarium 4.

637. Ne curua bma fiat imaginaria, oportet vt sit vbique $dx < ds$. Hanc ob rem debet esse $dt + \frac{(b-gt)^m ds}{gk^m} < ds$ seu $gk^m dt < gk^m ds - (b-gt)^m ds$. Hoc autem ita se habet si fuerit gk^m
 dt

SVPER DATA LINEA IN MEDIO RES. 343

$\angle (gk^m - b^m)ds$, qui est casus si t euanescit et per-
rinet ad punctum a , nisi t alicubi habeat valo-
rem negativum. Quocirca ad hoc tantum est re-
spiciendum vt punctum a fiat reale, quod euenit
si $gk^m dt$ non maius fuerit quam $(gk^m - b^m) ds$.

Corollarium 5.

639. Ne igitur curua am fiat imaginaria, an-
te omnia necesse est, vt sit $b \angle k \sqrt[m]{g}$. Sit in pun-
cto A $ds = \alpha dt$, erit α numerus vnitatis maior;
et ideo erit $gk^m \angle \alpha(gk^m - b^m)$ seu $b \angle k \sqrt[m]{\frac{g(\alpha-1)}{\alpha}}$.
Si ergo curua MA in A habeat tangentem ho-
rizontalem debet esse $b \angle k \sqrt[m]{g}$ propter $\alpha = \infty$.

Corollarium 6.

640. Sit autem, si fuerit $ds = \alpha dt$ in pun-
cto A , $b^m = \frac{g(\alpha-1)}{\alpha} k^m$; erit in ipso puncto a , dx
 $= \frac{ds}{\alpha} + \frac{(\alpha-1)ds}{\alpha} = ds$. Hoc ergo casu curua am in
 a tangentem habebit verticalem.

Corollarium 7.

641. In initio motus in B fit $b = gt$, seu
 $t = \frac{b}{g}$. Pro puncto b igitur erit $dx = dt$ curua-
rum elementis sumtis aequalibus. Quare tangen-
tes in punctis B et b aequaliter erunt inclina-
tae.

Scho-

Scholion I.

642. Quia curua *am* non absolute ex curua AM construi potest, sed praeterea nosse oportet celeritatem in puncto A seu descensus initium B; si in curua AM aliud descensus initium accipitur, alia inuenietur curua *am*. Curuae ergo BMA et *bma* ratione vnici descensus tantum ita congruunt, vt celeritates aequalibus percurfis spatiis sint inter se aequales; et si in aliis punctis initia descensus ponantur, haec conuenientia non amplius locum habebit. Non igitur dantur duae curuae super quibus descensus omnes ad datum punctum vsque inter se congruant, altera in vacuo altera in medio resistente constituta.

Exemplum I.

642. Sit AMB linea recta vtcunque inclinata ita vt sit $s = at$; et quaeratur curua *amb* super qua corpus simili modo progrediatur in medio resistente, quo super AMB in vacuo. Posito autem $\frac{s}{a}$ loco t prodibit sequens aequatio inter x et s pro curua quaesita *amb*: $dx = \frac{ds}{a} + \frac{(\alpha b - gs)^m}{g \alpha^m k^m} ds$, cuius integralis est $x = \frac{s}{a} + \frac{\alpha b^{m+1}}{(m+1)g^2 k^m} - \frac{(\alpha b - gs)^{m+1}}{(m+1)g^2 \alpha^m k^m}$. Ne punctum a fiat ima-

imaginarium oportet vt $\frac{1}{\alpha} + \frac{b^m}{g k^m} < 1$. Nam si

fuerit $b^m = \frac{(\alpha-1)g k^m}{\alpha}$ curua in a habebit tan-

gentem verticalem; neque propterea b maiorem habere poterit valorem. Ponatur igitur corpus super linea inclinata BMA ex tanta altitudine de-

scendisse, vt fiat $b = k \sqrt[m]{\frac{g(\alpha-1)}{\alpha}}$, erit $dx = \frac{ds}{\alpha} +$

$\frac{(k \sqrt[m]{g \alpha^{m-1} (\alpha-1)} - g s)^m ds}{g \alpha^m k^m}$, quae est aequatio pro

curua amb , in qua initium descensus in b est capiendum, vbi est $ds = \alpha dx$, seu arcus amb erit $= k$

$\sqrt[m]{\frac{\alpha^{m-1} (\alpha-1)}{g^{m-1}}}$. Si resistentia fuerit quadratis cele-

ritatum proportionalis erit $m=1$, ideoque $dx = \frac{ds}{\alpha} +$

$\frac{g k (\alpha-1) - g s}{g \alpha k} ds = ds - \frac{s ds}{\alpha k}$ et integrando $x = s - \frac{s s}{2 \alpha k}$.

Quae est aequatio pro cycloide super basi horizontali descripta, cuius circuli generatoris diameter est $\frac{\alpha k}{2}$.

Corollarium 8.

644. Sit ergo super basi horizontali CB descripta cyclois AMB circulo generatore ANC, Tab. XIII.
Fig 7.

et sit medium resistens in duplicata ratione celeritatum, cuius exponens sit $= k$. Si nunc in circulo ANC sumatur chorda AN $= \frac{k}{2}$ ducaturque horizontalis PNM, et ex M tangens MT: atque duo corpora ponantur descendere alterum

Tom.II.

Xx

super

super MT in vacuo et alterum super curua MB in medio resistente, ambo haec corpora aequalibus temporibus aequalia spatia absoluent.

Exemplum 2.

Fig. 6

645. Sit curua AMB cyclois deorsum spectans, cuius circuli generatoris diameter $= \frac{a}{2}$; erit $ss = 2at$ et $t = \frac{ss}{2a}$ atque $dt = \frac{sds}{a}$. His ergo substitutis prodibit pro curua amb sequens aequatio

$$dx = \frac{sds}{a} + \frac{(2ab - gss)^m ds}{2^m g a^m k^m}; \text{ vel si totus arcus}$$

AMB, qui in vacuo descensu absolui ponitur, vocetur c erit $b = \frac{gcc}{2a}$; ideoque pro curua amb orientur ista aequatio

$$dx = \frac{sds}{a} + \frac{g^{m-1} (cc - ss)^m ds}{2^m a^m k^m}.$$

Ne igitur haec curua in puncto a fiat imaginaria, oportet sit $g^{m-1} c^{2m} \geq 2^m a^m k^m$, vel altitudo arcus AB minor esse debet quam $\frac{k}{g} \sqrt[m]{g}$; nam

si fuerit altitudo arcus $AB = \frac{k}{g} \sqrt[m]{g}$, tum curuae amb tangens in b erit verticalis. Si ergo B sit cuspis cycloidis, erit $\frac{cc}{2a} = \frac{a}{2}$ seu $c = a$; et si sit praeterea $g^{m-1} a^m = 2^m k^m$, quo curuae amb in a tangens fiat verticalis, habebitur ista aequatio dx

$$= \frac{sds}{a} + \frac{(aa - ss)^m ds}{a^{2m}}; \text{ quae curua in duobus}$$

punctis a et b habebit tangentes verticales.

Co-

Corollarium 9.

646. Cum igitur corpus in vacuo super cycloide ita descendat, ut eius accelerationes sint spatiis percurrendis proportionales; eandem proprietatem habebit descensus in medio resistente super curua *bma*, si initium descensus sumatur in puncto *b*, quod per aequationem ad curuam *amb*, determinatur, erit scilicet $amb = c$.

Corollarium 10.

647. Si in curua *AMB* aliud descensus initium *B* capiatur; tota curua *amb* alia reperietur, quia in eius aequatione longitudo arcus $AMB = c$ continetur. Quare etiamsi cyclois sit curua tautochronea in vacuo, curua *amb* talis tamen non erit in medio resistente: quia pluribus descensibus super *AMB* totidem curuae diuersae in medio resistente respondent.

Scholion 2.

648. Curuae hoc exemplo erutae sunt eae ipsae, quas Clar. Hermannus in Comm. Tom. II. pro tautochronis in mediis resistantibus inuenit; sed simul ipse demonstrauit eas quaesito satisfacere non posse. Ceterum ex his intelligitur, simili modo in medio resistente curuam posse inueniri, super qua corpus ascendendo eodem modo moueatur, quo super dato curua in vacuo. Sint

Xx 2

enim

enim puncta A et a initia ascensus illud in vacuo hoc in medio resistente; fitque celeritas initialis debita altitudini b ; habebitur pro curua amb

ista aequatio $dx = dt - \frac{(b-gt)^m ds}{g k^m}$; ex qua aequa-

tione intelligitur, curuam amb non fieri posse imaginariam, nisi ipsa curua AMB talis fuerit.

Nam quia, ne curua amb sit imaginaria, esse debet $dx < ds$; hic dx minus est quam dt , quod per se minus est quam ds . Vt si linea AMB sit

linea verticalis, altera amb poterit assignari; nam posita $AB = c$, erit $b = gc$, et $s = t$; quare pro curua amb inuenitur ista aequatio $dx = ds -$

$\frac{g^{m-1}(c-s)^m ds}{k^m}$, cuius integralis est $x = s +$

$\frac{g^{m-1}(c-s)^{m+1} - g^{m-1}c^{m+1}}{(m+1)k^m}$. Accommodetur haec

aequatio ad resistantiam quadratis celeritatum proportionalem fiet $m = 1$, ideoque erit $x = s +$

Fig. 7.

$\frac{(c-s)^2 - c^2}{2k} = \frac{2(k-c)s + ss}{2k}$, quae est ad cycloidem hoc

modo: describatur cyclois AMB circulo generatore diametri $AC = \frac{k}{2}$, super basi horizontali BC,

tum capiatur arcus $AM = k - c$; erit M initium ascensus, ex quo puncto, si corpus MA ascendat

celeritate altitudini gc debita, in medio resistente in duplicata ratione celeritatum eodem modo

mouebitur, quo in vacuo eadem celeritate initiali sursum ascendens verticaliter.

PRO-

PROPOSITIO 73.

Problema.

649. Si potentia fuerit vniformis et deorsum di-
 recta, mediumque in ratione quacunque multiplicata
 celeritatum resistat; determinare curuam AM, super
 qua corpus descendendo secundum horizontalem AH
 aequabiliter progrediatur.

Tab. XIV.
 Fig. 1.

Solutio.

Sit A curuae punctum supremum, per quod
 ducatur axis verticalis AP; celeritasque, qua cor-
 pus horizontaliter progreditur, sit debita altitu-
 dini b . Sumatur abscissa $AP = x$, applicata PM
 $= y$ et arcus $AM = s$; sitque corporis in M cele-
 ritas debita altitudini v ; qua celeritate corporis ele-
 mentum $Mm = ds$ percurrent. Erit ergo vt ds ad
 dy ita corporis celeritas per Mm , quae est vt
 \sqrt{v} ad celeritatem horizontalem \sqrt{b} , vnde ori-
 tur $v = \frac{bds^2}{dy^2}$. Iam sit potentia sollicitans $= g$; ex-
 ponens resistentiae k , et ipsa resistentia $= \frac{v^m}{k^m}$. His

positis erit $dv = g dx - \frac{v^m ds}{k^m}$, quae aequatio, si
 loco v valor $\frac{bds^2}{dy^2}$ substituatur, exprimet naturam
 curuae quaesitae. Sit autem $ds = p dy$, erit $v = bp^2$
 et $dx = dy \sqrt{(p^2 - 1)}$. Quocirca habebitur $2bp dp = g dy$
 $\sqrt{(p^2 - 1)} - \frac{b^m p^{2m+1} dy}{k^m}$, quae separata dat $dy =$

Xx 3

2bk

$$\frac{2bk^m p dp}{gk^m \sqrt{(p^2-1)} - b^m p^{2m+1}}. \text{ Curvae igitur quaesitae se-}$$

$$\text{quens erit constructio; sumto } y = \frac{2bk^m p dp}{gk^m \sqrt{(p^2-1)} - b^m p^{2m+1}} \text{ erit } x = \frac{2bk^m p dp \sqrt{(p^2-1)}}{g^m \sqrt{(p^2-1)} - b^m p^{2m+1}}. \text{ Q E. I.}$$

Corollarium I.

650. Si loco pp restituatur $\frac{v}{b}$, atque per v definiantur y et x , erit $y = \int \frac{k^m dv \sqrt{b}}{gk^m \sqrt{(v-b)} - v^m \sqrt{v}}$ atque $x = \int \frac{k^m dv \sqrt{(v-b)}}{gk^m \sqrt{(v-b)} - v^m \sqrt{v}}$. Similique modo hinc erit arcus $s = \int \frac{k^m dv \sqrt{v}}{gk^m \sqrt{(v-b)} - v^m \sqrt{v}}$. Sumto autem $\frac{v}{b}$ loco pp erit $ds = \frac{dy \sqrt{v}}{\sqrt{b}}$ et $dx = \frac{dy \sqrt{(v-b)}}{\sqrt{v}}$ atque $ds = \frac{dx \sqrt{v}}{\sqrt{(v-b)}}$.

Corollarium 2.

651. Quia aequatio $dy = \frac{k^m dv \sqrt{b}}{gk^m \sqrt{(v-b)} - v^m \sqrt{v}}$ est separata; ex ea solutio particularis quaesito satisfaciens erui potest, faciendo denominatorem $gk^m \sqrt{(v-b)} - v^m \sqrt{v} = 0$, vnde erit ipsa celeritas \sqrt{v} constans. Sit ergo $v = c$ erit $\sqrt{(v-b)} = \frac{c^m \sqrt{c}}{gk^m}$; atque

atque ideo $ds = \frac{gk^m dx}{c^m}$ pro linea recta inclinata
ut supra iam inuenimus (627).

Corollarium 3.

652. Quo autem corpus data celeritate, quae debita est altitudini b horizontaliter progrediatur, ex aequatione $V(c-b) = \frac{c^m \sqrt{c}}{gk^m}$ definiri debet altitudo c . Qua inuenta habebitur inclinatio rectae satisfaciens, et celeritas corporis initialis \sqrt{c} in A ; qua aequabiliter per rectam descendet.

Corollarium 4.

653. Si resistentia euanescat corpusque in vacuo moueatur fiet $k = \infty$ ideoque $x = \int \frac{dv}{g}$ seu $v = g(a+x)$, atque $dy = \frac{dx \sqrt{b}}{\sqrt{(ga+gx-b)}}$. Integrando ergo fiet $y = \frac{2}{g} \sqrt{b}(ga+gx-b) - \frac{2}{g} \sqrt{b}(ga-b)$ quae est aequatio pro parabola, quam corpus projectum libere describit.

Exemplum.

654. Si medium fuerit rarissimum, atque ideo k valde magnum, erit $\frac{1}{gk^m \sqrt{(v-b)} - v^m \sqrt{v}}$
 $= \frac{1}{gk^m \sqrt{(v-b)}} + \frac{v^m \sqrt{v}}{g^2 k^{2m} (v-b)} q. pr.$ Hanc ob rem
ha-

habebitur $y = \frac{2\sqrt{b(v-b)}}{g} + \int \frac{v^m dv \sqrt{bv}}{g^2 k^m (v-b)}$ et $x = \frac{v}{g} + \int \frac{v^m dv \sqrt{v}}{g^2 k^m \sqrt{v-b}}$. Ex hac posteriori aequatione est quam proxime $v = gx - \int \frac{g^{m-1} x^m dx \sqrt{gx}}{k^m \sqrt{gx-b}}$, qui valor in aequatione $dy = \frac{dx \sqrt{b}}{\sqrt{v-b}}$ substitutus dat aequationem inter x et y pro curua quaesita.

PROPOSITIO 74.

Problema.

Tab. XIV. 655. *Inuenire curuam AM super qua corpus*
Fig. 2. *descendens in medio quocunque resistente aequabiliter*
deorsum progrediatur existente potentia absoluta uni-
formi et deorsum directa.

Solutio.

Posita abscissa $AP = x$, $AM = s$, sit celeritas qua corpus vniformiter descendere debet debita altitudini b . Potentia porro vniformis deorsum directa sit g , et altitudo debita celeritati $M = v$ atque resistentia $= \frac{v^m}{k^m}$ erit ergo $dv = g dx - \frac{v^m ds}{k^m}$. Debeat autem esse vt $Mm : MN = \sqrt{v} : \sqrt{b}$, unde erit $v = \frac{b ds^2}{dx^2}$. Ex hac ergo aequatione erit $ds = \frac{dx \sqrt{v}}{\sqrt{b}}$, quo valore in aequatione substituto habebitur $dx = g dx - \frac{v^{m+\frac{1}{2}} dx}{k^m \sqrt{b}}$ seu $dx = \frac{k^m dv \sqrt{b}}{g k^m \sqrt{b} - v^m \sqrt{v}}$.
Quam-

Quamobrem erit $x = \int \frac{k^m dv \sqrt{b}}{g k^m \sqrt{b-v^m} \sqrt{v}}$; $s =$

$\int \frac{k^m dv \sqrt{v}}{g k^m \sqrt{b-v^m} \sqrt{v}}$, atque applicata PM $y =$

$\int \frac{k^m dv \sqrt{(v-b)}}{g k^m \sqrt{b-v^m} \sqrt{v}}$. Ex quibus aequationibus constructio curvae quaesitae conficitur. Q. E. I.

Corollarium I.

656. Ex his tribus aequationibus, si desideretur aequatio ex x , y et s tantum consistens, accipi potest ea, ex qua valor ipsius v commodissime poterit inueniri, isque deinceps in alterutra reliquarum substitui.

Corollarium 2.

657. Quia aequatio $dx = \frac{k^m dv \sqrt{b}}{g k^m \sqrt{b-v^m} \sqrt{v}}$ indeterminatas a se inuicem habet separatas, poterit solutio particularis obtineri ponendo $g k^m \sqrt{b-v^m} \sqrt{v} = 0$. Hinc igitur erit $v = g^{\frac{1}{2m+1}} k^{\frac{2m}{2m+1}} b^{\frac{1}{2m+1}}$

ideoque $ds = \frac{g^{\frac{1}{2m+1}} k^{\frac{m}{2m+1}} dx}{b^{\frac{m}{2m+1}}}$. Satisfacit ergo li-

nea recta inclinata, si corpus data celeritate \sqrt{v} , super ea moueatur.

Scholion I.

658. Quod in praecedente et hoc problemate linea recta inclinata solutionem praebeat particularem, ex eo intelligi potest, quod in medio resistente recta inclinata inueniri possit, super qua corpus aequabiliter moueatur, vt supra (627) ostendimus. Hic autem ipse casus vtrique problemati satisfacit; si enim corpus super recta aequabili motu incedit, tam horizontaliter, quam verticaliter aequabiliter quoque promouetur; quin etiam secundum quamcunque plagam aequabiliter fertur.

Corollarium 3.

659. Pro vacuo fit $k = \infty$. Quamobrem erit $x = \frac{v}{g}$ seu $v = gx$ atque $ds = \frac{dx\sqrt{gx}}{\sqrt{b}}$ et $dy = \frac{dx\sqrt{(gx-b)^2}}{\sqrt{b}}$ quae aequatio integrata dat $y = \frac{2(gx-b)^{\frac{3}{2}}}{3g\sqrt{b}}$, et praebet parabolam cubicalem rectificabilem vt supra iam inuenimus.

Exemplum I.

660. Ponamus resistantiam ipsis celeritatibus proportionalem erit $m = \frac{1}{2}$, ideoque $x = \int \frac{dv\sqrt{bk}}{g\sqrt{bk}-v} = \sqrt{bk} \int \frac{g\sqrt{bk}}{g\sqrt{bk}-v}$, si initium ascissarum in eo puncto accipiatur, vbi v euanescit. Ex hac autem aequatione prodit $e^{\frac{x}{\sqrt{bk}}} = \frac{g\sqrt{bk}}{g\sqrt{bk}-v}$ seu $v = e^{\frac{-x}{\sqrt{bk}}}$
($e^{\frac{x}{\sqrt{bk}}}$)

$(e^{\frac{x}{\sqrt{bk}}} - 1) g \sqrt{bk} = g \sqrt{bk}, (1 - e^{-\frac{x}{\sqrt{bk}}})$. Valore hoc

ipsius v substituto habebitur $ds = \frac{dx \sqrt{g(1 - e^{-\frac{x}{\sqrt{bk}}}) \sqrt{bk}}}{\sqrt{b}}$

Vel cum fit $ds = \frac{dv \sqrt{kv}}{g \sqrt{bk} - v}$, ponatur $v = u^2$ erit $ds = \frac{2u^2 du \sqrt{k}}{g \sqrt{bk} - uu} = \frac{2gk du \sqrt{b}}{g \sqrt{bk} - uu} - 2 du \sqrt{k}$, quae integrata dat

$s = \sqrt[4]{g^2 bk^3} \int \frac{\sqrt[4]{g^2 bk + vv}}{\sqrt[4]{g^2 bk - vv}} - 2 \sqrt{k} v$, in qua valor ipsius v ante inuentus substitui potest, quo prodeat aequatio inter x et s .

Exemplum 2.

661. Resistat nunc medium in duplicata celeritatum ratione, erit $m = 1$; ideoque $dx = \frac{k dv \sqrt{b}}{gk \sqrt{b} - v \sqrt{v}}$ et $ds = \frac{k dv \sqrt{v}}{gk \sqrt{b} - v \sqrt{v}}$. Huius posterioris aequationis integrale est $s = \frac{2k}{3} \int \frac{gk \sqrt{b}}{gk \sqrt{b} - v \sqrt{v}}$, ex qua ori-

tur $e^{\frac{3s}{2k}} = \frac{gk \sqrt{b}}{gk \sqrt{b} - v \sqrt{v}}$; atque $v^{\frac{3}{2}} = gk(e^{\frac{3s}{2k}} - 1)e^{-\frac{3s}{2k}} \sqrt{b}$

$= gk(1 - e^{-\frac{3s}{2k}}) \sqrt{b}$. Quocirca erit $\sqrt{v} = \sqrt[3]{gk(1 - e^{-\frac{3s}{2k}})} \sqrt{b}$; qui valor in aequatione $dx = \frac{ds \sqrt{b}}{\sqrt{v}}$ substitutus dat aequationem inter s et x pro curva quae-fita.

Scholion 2.

662. Quemadmodum in his duobus problematibus curuas determinauimus super quibus corpus motum vel secundum horizontem vel deorsum aequabiliter feratur, ita simili modo proble-

ma resolui potest, si corpus secundum quamvis aliam plagam aequabiliter progredi debeat; ipsam autem quaestionem, quia nihil concinni ex solutione deduci potest, hic omisi; atque ob eandem causam problema isochronae paracentricae in medio resistente non attingo. Adiungam vero his, in quibus celeritatum quaedam lex proponitur, non parum curiosum problema, quod a nemine adhuc est tractatum, pro mediis resistantibus; quod pro vacuo propositum ne problema quidem est. Quaeritur scilicet curua super qua corpus ad datum punctum maxima celeritate pertingat; in vacuo enim corpus super quacunque curua motum in eodem loco semper eandem obtinet celeritatem.

PROPOSITIO 75.

Problema.

Tab. XIV.
Fig. 3.

663. *Inter omnes curvas puncta A et C iungentes determinare eam AMC, super qua corpus ex A ad C descendens maximam acquirat celeritatem existente resistantia in quacunque multiplicata ratione celeritatum, et potentia uniformi deorsum tendente.*

Solutio.

Quo corpus ad punctum C maxima cum celeritate perveniat, curvae quaesitae AMC duo quaeque elementa $Mm, m\mu$ ita posita esse debent, ut corpus ea percurrendo maximum accipiat celeri-

leritatis incrementum. Nam si corpus per alia
elementa $M\mu$ maius acquireret celeritatis augmen-
tum, maiorem quoque in C habiturum esset ce-
leritatem. Per methodum igitur maximorum po-
sitio elementorum $Mm, m\mu$ inuenietur, si elemen-
ta haec cum proximis $Mn, n\mu$ comparentur et
celeritatis augmenta, quae per vtraque generan-
tur, inter se aequalia ponantur. Ducantur ad hoc
ad axem verticalem AP *plicatae* MP, nmp et
 $\mu\pi$ sintque elementa axis Pp, $p\pi$ aequalia. Du-
cantur quoque verticales MF, mg , et in curuae
elementa normales mf, ng . Iam sit potentia sol-
licitans $=g$, exponens resistentiae $=k$, ipsa re-
sistentia in $2m$ multiplicata ratione celeritatum, et
altitudo celeritati in M debita $=v$. His positis
erit incrementum ipsius v per $Mm = g \cdot MF -$

$\frac{v^m Mm}{k^m}$ et incrementum altitudinis celeritati debi-
tae dum corpus per $m\mu$ progreditur $=g \cdot mG -$
 $(v + g \cdot MF - \frac{v^m Mm}{k^m})^m m\mu$. Dum ergo corpus

elementa Mm et $m\mu$ conficit altitudo v accipit
augmentum $=g(MF + mG) - \frac{v^m Mm}{k^m}$

$(v + g \cdot MF - \frac{v^m Mm}{k^m})^m m\mu$. At elementa $Mn, n\mu$

percurrendo accipiet v augmentum $=g(MF + mG) -$
Yy 3 $\frac{v^m Mn}{k^m}$

$$\frac{v^m M n}{k^m} = \frac{(v + g \cdot MF - \frac{v^m}{k^m} M n)^m n \mu}{k^m}. \quad \text{Quibus sibi ac-}$$

qualibus positis habebitur $0 = v^m (M n - M m) + (v + g \cdot MF - \frac{v^m}{k^m} M n)^m n \mu - (v + g \cdot MF - \frac{v^m}{k^m} M m)^m m \mu$. Est vero $M n - M m = n f$ et $(v + g \cdot MF - \frac{v^m}{k^m} M n)^m = v^m + m g v^{m-1} MF - \frac{m v^{2m-1}}{k^m} M n$ atque $(v + g \cdot MF - \frac{v^m}{k^m} M m)^m = v^m + m g v^{m-1} \cdot MF - \frac{m v^{2m-1}}{k^m} M m$. Nunc vero his valoribus substituen-

dis proveniet haec aequatio $v(nf - mg) - mg \cdot MF$. $mg + \frac{m v^m}{k^m} (M n \cdot n \mu - M m \cdot m \mu) = 0$. At est $M n \cdot n \mu - M m \cdot m \mu = m \mu \cdot n f - M m \cdot mg$, atque ob trian-
gula $n f m$, $m F M$ et $m g n$, $\mu G m$ similia est $n f = \frac{m F \cdot m n}{M m}$ atque $mg = \frac{\mu G \cdot m n}{m \mu}$. His substitutis et per $m n$

diuiso prodit $v(\frac{m F}{M m} - \frac{\mu G}{m \mu}) - mg \cdot \frac{M F \cdot \mu G}{m \mu} + \frac{m v^m}{k^m} (\frac{m \mu \cdot m F}{M m} - \frac{M m \cdot \mu G}{m \mu}) = 0$. Huius aequationis duō prio-
ra membra sunt differentialia primi gradus, ter-
tium vero, quia differentiali secundi gradus aequi
pollet, reici potest; fiet ergo $\frac{m g \cdot M F \cdot \mu G}{m \mu} + v(\frac{\mu G}{m \mu} - \frac{m F}{M m}) = 0$, siue $\frac{m g \cdot M F \cdot m F}{M m} + v d. \frac{m F}{M m} = 0$. Ex qua aequa-
tione determinatur positio elementorum $M m$ et
 $m \mu$.

*m*μ. Quo autem symbolis utamur, fit $AP=x$,
 $PM=y$ et $AM=s$ erit $Pp=p\pi=dx$, $mF=dy$,
 et $Mm=ds$, prodibitque $\frac{mgdx dy}{ds} + v d. \frac{dy}{ds} = 0$. Ae-

quatio vero canonica est $dv = gdx - \frac{v^m ds}{k^m}$, in qua
 si loco gdx ex superiore aequatione substituat

$\frac{-vds}{m dy} d. \frac{dy}{ds}$ habebitur $dv + \frac{vds}{m dy} d. \frac{dy}{ds} + \frac{v^m ds}{k^m} = 0$,

feu $\frac{m dv dy}{ds} + v d. \frac{dy}{ds} + \frac{m v^m dy}{k^m} = 0$. Sit $dy = p ds$

et $v^{1-m} = u$, erit vt sequitur $p du + \frac{(1-m)}{m} u dp +$
 $\frac{(1-m)p ds}{k^m} = 0$, ex qua integrata prodit $u =$

$\frac{(m-1)p^{\frac{m-1}{m}}}{k^m} \int p^{\frac{1-m}{m}} ds$. Ex hoc u obtinebitur er-

go vicissim $v = u^{\frac{1}{1-m}}$, qui valor in superiori ae-
 quatione $mgpds\sqrt{(1-pp)} + v dp = 0$ substitutus,
 dabit aequationem inter p et s , et consequenter
 inter y et s . Ad curuam autem construendam
 hoc modo computum institui expedit: Posito dy
 $= p ds$ habentur hae duae aequationes $mgpds\sqrt{(1-pp)}$

$+ v dp = 0$ et $dv = gds\sqrt{(1-pp)} - \frac{v^m ds}{k^m}$.

Ex illa est $ds = \frac{-v dp}{mg p \sqrt{(1-p^2)}}$ qui in hac substitu-
 tus dat $mp dv + v dp = \frac{v^{m+1} dp}{g k^m \sqrt{(1-pp)}}$. Haec diuifa

per $v^{m+1} p^2$ fit integrabilis eritque integrale

$I =$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{v^m p} &= C + \frac{V(1-pp)}{g k^m p} \text{ feu } v^m = \frac{g k^m}{\alpha p + V(1-pp)} \text{ et } v \\
&= \frac{k \sqrt[m]{g}}{V(\alpha p + V(1-pp))}. \text{ Quocirca erit } mg ds = \\
&\frac{-k dp \sqrt[m]{g}}{p(1-pp)^{\frac{1}{2}} V(\alpha p + V(1-pp))} \text{ et } mg dx = \frac{-k dp \sqrt[m]{g}}{p V(\alpha p + V(1-pp))} \\
\text{atque } mg dy &= \frac{-k dp \sqrt[m]{g}}{(1-pp)^{\frac{1}{2}} V(\alpha p + V(1-pp))}. \text{ Ex qui-} \\
&\text{bus aequationibus facile est curvam quaesitam con-} \\
&\text{struere. Q. E. I.}
\end{aligned}$$

Corollarium I.

664. Si radius osculi curvae in M versus axem directus vocetur r , erit $d \frac{dy}{ds} = -\frac{dx}{r}$. Hocque valore substituto habetur $\frac{mg dy}{ds} = \frac{v}{r}$ feu $\frac{2mg dy}{ds} = \frac{2v}{r}$. Est vero $\frac{2v}{r}$ vis centrifuga corporis in hac curva moti, cuius directio est ab axe directa et $\frac{g dy}{ds}$ est vis normalis. Quare in curva quaesita vis centrifuga est contraria vi normali et se habet ad vim normalem vt $2m$ ad 1 , id est, vt exponens potestatis celeritatis, cui resistentia est proportionalis ad unitatem.

Corollarium 2.

665. Hae igitur omnes curvae parte concaua sunt deorsum directae. Quia enim vis nor-
malis

malis directio deorsum respicit, et radius osculi in eandem plagam tendit, concavitas curvae quoque deorsum respicere debet.

Corollarium 3.

666. In medio resistente in simplici ratione celeritatum erit $2m=1$. Hoc ergo casu vis centrifuga aequalis est et contraria vi normali. Quamobrem curva quaesito satisfaciens, erit ipsa projectoria, quam corpus projectum libere describit.

Corollarium 4.

667. Quia in aequatione $mgds = -kdp\sqrt[1]{g}$ indeterminatae sunt $p(1-pp)^{\frac{1}{2}}\sqrt[1]{(ap + \sqrt[1]{(1-pp)})}$ separatae, tres solutiones particulares inde obtinentur. Primam dat aequatio $ap + \sqrt[1]{(1-pp)}=0$, quo casu celeritas fit infinita, et quaevis recta satisfacit. Secunda est $p=1$, seu $dy=ds$, quae est pro recta horizontali, et tertia est $p=0$, pro recta verticali; quae semper hanc habet proprietatem, ut corpus in ea descendens maxima celeritatis augmenta accipiat.

Exemplum I.

668. Resistat medium in simplici ratione celeritatum erit $m=\frac{1}{2}$. Sumatur ex tribus inuentis

Tom. II.

Zz

aequa-

aequationibus ea, quae dy continet, erit $dy = \frac{-2gkdp}{(\alpha p + \sqrt{(1-pp)})^2 \sqrt{(1-pp)}}$, cuius integralis est $y = C - \frac{2gkp}{\alpha p + \sqrt{(1-pp)}}$. Cum autem sit $p = \frac{dy}{ds}$ et $\sqrt{(1-pp)} = \frac{dx}{ds}$, erit $y = C - \frac{2gkdy}{\alpha dy + dx}$ seu neglecta constante C , quia curvam non immutat, erit $\alpha y dy + y dx + 2gk dy = 0$. Quae aequatio per y diuisa et de nouo integrata dat $\alpha y + x + 2gkly = C$. Quae est aequatio pro curua logarithmicali ea ipsa, quam Libr. I. projectoriam in hac resistentiae hypothesi inuenimus.

Exemplum 2.

669. Sit nunc resistentia quadratis celeritatum proportionalis erit $m = 1$. Sumatur aequatio ista $ds = \frac{-kdp}{p(1-pp)^{\frac{1}{2}}(\alpha p + \sqrt{(1-pp)})}$. Huius au-

tem integralis est $s = k \int \frac{\alpha p + \sqrt{(1-pp)}}{p} dp$, siue $e^{\frac{s}{k}} = \frac{\alpha p + \sqrt{(1-pp)}}{p} = \frac{\alpha dy + dx}{p dy}$. Hinc fit $\int e^{\frac{s}{k}} dy - \alpha dy = dx$,

atque $ds = dy \sqrt{(1 + (\int e^{\frac{s}{k}} dy - \alpha)^2)}$. Quae est aequatio pro curua quaesita, quae hanc habebit proprietatem, vt vis centrifuga corporis sit duplo maior quam vis normalis. Curua igitur perpetuo sursum premetur vi aequali vel ipsi vi normali vel dimidio vis centrifugae. In hac vero curua corpus ita mouebitur vt altitudo celeritati

in M debita sit $= \frac{gk}{e^{\frac{s}{k}} p} = \frac{gk ds}{\int e^{\frac{s}{k}} dy} = \frac{gk ds}{dx + \alpha dy}$.

Scho-

Scholion 1.

670. Cum in quavis resistentiae hypothesi peculiaris ratio inter vim centrifugam et vim normalem locum habeat; vacuum autem tanquam casus cuiusque resistentiae considerari queat: sequitur in vacuo quamvis curuam satisfacere debere. Omnes enim curvae in vacuo hanc habent proprietatem, ut super iis ex aequalibus altitudinibus aequales generentur celeritates; ideoque nulla potest definiri, quae potius quam reliquae quae-fito satisfaciant.

Scholion 2.

671. Notatu dignum est, quod in omnibus his curuis inuentis nusquam corporis celeritas sit aequalis nihilo. Atque idcirco problema hac methodo non ita resolui potest, ut determinetur inter omnes descensus ex A ad C ex quiete factos is, in quo corpus maximam acquirit celeritatem; cui quaestioni sola recta verticalis per C transiens et cum horizontali per A ducta coniuncta satisfacit. Nostra autem solutio ita est comparata, ut duorum elementorum quorumque contiguorum positionem eam definiat, quae maximum vel minimum celeritatis augmentum producat. Quamobrem hac methodo ea curua inuenitur, super qua corpus motum vel maius vel minus celeritatis augmentum acquirit, quam super alia quacunque curua A et C iungente, si

364 CAPUT TERTIVM DE MOTU PVNCTI

corpus ex A eadem celeritate descensum inchoet. Ex inuentis autem colligi potest, hac ratione eam prodire curuam, super qua minimum celeritatis incrementum generetur, vel super qua corpus motu maxime vniformi feratur. Atque hoc sensu facile perspicitur, motum ex quiete incipere non posse. Quanquam enim certum est, si puncta A et C in linea verticali sunt posita, super hac verticali motu in A ex quiete facto maximam in C generari celeritatem; tamen calculus non hanc dat solutionem, etiamsi praebeat lineam verticalem; sed celeritatem initialem in A facit debitam alt. $k\sqrt[3]{g}$, quae celeritas tanta est, vt non amplius augmentum accipere queat. Hac igitur celeritate corpus aequabiliter ex A ad C descendet; hacque ratione nullum, hoc est minimum capit celeritatis incrementum. Problema ergo, vt solutioni consentaneum fuisset, ita proponi debuisset; inter omnes lineas puncta A et C iungentes eam determinare, super qua corpus motum minima accipiat celeritatis augmenta; atque simul celeritatem initialem in A huic quaesito accommodatam definire.

Scholion 3.

672. Secundum ordinem praescriptum sequi deberent nunc huiusmodi problemata, in quibus temporum quadam lege data curuae essent investigandae idoneae; sed cum temporum leges pleraeque

raequae ad celeritatum leges possint reduci, huiusmodi quaestiones non profero. Sed vnicam in hoc negotio quaestionem de curuis brachystochronis tractabo, quia ea etsi temporis praescripta est conditio ad celeritatum rationes, quas iam peruoluimus, reduci non potest. Qua in re iisdem praemissis utar, quae supra circa brachystochronas in vacuo sunt tradita.

PROPOSITIO 76.

Theorema.

673. *In medio quocunque resistente et potentia-* Tab. XIV.
rum absolutarum hypothesei quacunque ea curua AMC Fig. 4.
est brachystochrona seu breuissimum ab A ad C pro-
ducit descensum; in qua vis centrifuga est aequalis vi
normali, et in eandem plagam directa.

Demonstratio.

Quaecunque fuerint potentiae absolutae in corpus in M agentes, eae in duas inter se normales possunt resolui, quarum altera sit $ML=P$, altera $MN=Q$. Sumto curuae elemento $Mm=ds$, ductisque perpendicularis ml , mn , sit $Ml=mn=dx$ et $ml=Mn=dy$. Ponatur altitudo celeritati in M debita $=v$ et vis resistantiae $=R$, atque radius osculi in M $=r$, quem pono sursum directum, ita ut posito dx constante sit $r=\frac{ds^2}{dx dy}$. His positis erit $dv=Pdx+Qdy-Rds$, quia

$\frac{Pdx + Qdy}{ds}$ est vis tangentialis ex potentiis P et Q orta. At supra ex natura brachystochronismi si fuerit $dv = Pdx + Qdy + Rds$ inuenimus fore $\frac{2v}{r} = \frac{Pdy - Qdx}{ds}$ (364), quae formulae ab hac nostra tantum in signo literae R differunt, haecque in computum non venit. Denotat autem $\frac{2v}{r}$ vim centrifugam secundum normalem MO agentem atque $\frac{Pdy - Qdx}{ds}$ est vis normalis iuxta MO agens ex vtraque vi P et Q orta. Quare si fuerit vis centrifuga vi normali aequalis, et in eandem plagam directâ, curua erit brachystochrona. Q.E.D.

Corollarium I.

674. Si vis normalis, quae oritur ex resolutione potentiarum absolutarum corpus sollicitantium, vocetur N et vis tangentialis ex eadem resolutione orta ponatur T, erit $dv = (T - R)ds$ et $\frac{2v}{r} = N$, quae duae aequationes coniunctae dabunt curuam brachystochronam.

Corollarium 2.

675. Quaecunque igitur fuerit resistentia, erit semper $v = \frac{Nr}{2}$, vnde celeritas corporis super brachystochrona facile inuenitur. Erit enim vt vis grauitatis r ad vim normalem N ita dimidium radii osculi ad altitudinem celeritati in M debitam.

Scho-

Scholion.

676. Haec eadem proportio quoque locum habet in motu corporum proiectorum libero, est enim pariter pro motu libero vis centrifuga aequalis vi normali. Discrimen autem in hoc consistit, ut in motu libero vires centrifuga et normalis sint inter se oppositae; pro curvis brachystochronis autem conspirantes. Siue in motu libero directiones radii osculi r et vis normalis N coincidunt; in brachystochronis vero inter se sunt contrariae. Hanc ob rem hic sumimus $r = \frac{ds^3}{dx dy}$ cum in motu libero sit $r = \frac{ds^3}{dx dy}$.

Corollarium 3.

677. Cum ex formula brachystochronismi indolem continente prodeat $v = \frac{Nr}{2}$; si hic valor ubique loco v in altera aequatione $dv = (T-R)ds$ substituatur, habebitur aequatio naturam curvae brachystochronae exhibens.

Corollarium 4.

678. In quocunque ergo medio resistente et quibuscunque sollicitantibus corpus potentiis, eae curvae omnes erunt brachystochronae, in quibus tota, quam sustinent, pressio duplo maior est quam vel sola vis centrifuga vel sola ex potentiarum sollicitantium resolutione orta vis normalis.

PRO-

PROPOSITIO 77.

Problema.

Tab. XIV.
Fig. 2.

679. In medio uniformi quod resistit in ratione quacunque multiplicata celeritatum, et potentia absoluta existente uniformi et deorsum directâ; determinare curuam brachystochronam AM, super qua corpus descendens tempore breuissimo ex A ad M perueniat.

Solutio.

Positis in axe verticali abscissa $AP = x$, ei-que respondente applicata $PM = y$, arcuque curuae quasitae $AM = s$; sit g potentia deorsum sollicitans, et $\frac{v^m}{k^m}$ resistentia in M, si quidem celeritas in M fuerit debita altitudini v . His positis erit vis normalis $= \frac{gdy}{ds}$; cui aequalis esse debet vis centrifuga, quae est $\frac{2v}{r} = \frac{2vdxddy}{ds^3}$ (676), sumto dx pro constante. Facta ergo aequatione est $v = \frac{gds^2dy}{2dxddy}$. Aequatio vero canonica pro descensu in hoc medio resistente dat $dv = gdx - \frac{v^m ds}{k^m}$. Prior autem

aequatio posito $dsdds$ loco $dyddy$ propter dx constans abit in hanc $v = \frac{gdsdy^2}{2dxdds}$, ex qua fit $dv = \frac{gdy^2}{2dx} + \frac{gdsdyddy}{dxdds} - \frac{gdsdy^2d^3s}{2dxdds^2} = \frac{gdy^2}{2dx} + \frac{gds^2}{dx} - \frac{gdsdy^2d^3s}{2dxdds^2} = gdx - \frac{v^m ds}{k^m}$, quae aequatio reducta dat $\frac{gdsdy^2d^3s}{2dxdds^2} =$

$\frac{3gdy^2}{2dx}$

$$\frac{3gdy^2}{2dx} = \frac{g^m ds^{m+1} dy^{2m}}{2^m k^m dx^m dds^m}, \text{ seu } ds d^3 s - 3 dds^2 =$$

$$\frac{g^{m-1} ds^{m-1} dy^{2m-2}}{2^{m-1} k^m dx^{m-1} dds^{m-2}}; \text{ haecque aequatio exponit}$$

naturam curvae quaesitae. Quae aequatio quo reducatur et ad constructionem praeparatur, pono $ds = p dx$, vt fit $dy = dx \sqrt{p^2 - 1}$, eritque $dds = dp dx$ et $d^3 s = dx ddp$. His substitutis habe-

$$\text{bitur ista aequatio } pddp - 3dp^2 = \frac{g^{m-1} p^{m+1} dx^m (pp-1)^{m-1}}{2^{m-1} k^m dp^{m-2}}.$$

Nunc fit porro $dx = q dp$; erit $ddx = 0 = dq dp + qddp$ seu $ddp = -\frac{dp dq}{q}$; orieturque haec aequatio $-\frac{pdq}{q} -$

$$3 dp = \frac{g^{m-1} p^{m+1} q^m dp (p^2 - 1)^{m-1}}{2^{m-1} k^m} \text{ seu } \frac{-pdq - 3 q dp}{q^{m+1}}$$

$$= \frac{g^{m-1} p^{m+1} dp (p^2 - 1)^{m-1}}{2^{m-1} k^m}. \text{ Multiplicetur haec}$$

aequatio quo integrabilis fiat per mp^{-3m-1} et habebitur $-mp^{-3m} q^{-m-1} dq - 3mp^{-3m-1} q^{-m} dp =$

$$\frac{mg^{m-1} p^{-2m} dp (p^2 - 1)^{m-1}}{2^{m-1} k^m}, \text{ cuius integralis est } p^{-3m}$$

$$q^{-m} = \frac{mg^{m-1}}{2^{m-1} k^m} \int \frac{(p^2 - 1)^{m-1} dp}{p^{2m}}. \text{ Ponatur } \frac{mg^{m-1}}{2^{m-1} k^m}$$

$$\int \frac{(p^2 - 1)^{m-1} dp}{p^{2m}} = P^{-m}, \text{ erit } P \text{ functio quaedam}$$

ipfius p , et proinde dabitur concessis saltem quadraturis. His igitur positis erit $p^3 q = P$, atque

$$q = \frac{P}{p^3}. \text{ Quia vero est } dx = q dp \text{ erit } x = \int \frac{P dp}{p^3}$$

370 CAPVT TERTIVM DE MOTV PVNCTI

et $s = \int \frac{p dp}{p^2}$ atque $y = \int \frac{p dp \sqrt{p^2 - 1}}{p^3}$. Unde constructio curvae brachystochronae sequitur. Q. E. I.

Corollarium I.

680. Sit A punctum in quo motus incipit atque celeritas est nulla; erit ibi $v = 0$ seu $\frac{g ds dy^2}{2 dx ds} = 0$, unde fit $dy = 0$, quia ds evanescere non potest. In puncto A ergo curva habebit tangentem verticalem.

Corollarium 2.

681. Quia in ipso motus initio motus in medio resistente a motu in vacuo non discrepat, curvae AM initium A a cycloidis cuspide, quae est brachystochrona in vacuo non discrepabit. Ideoque in A non solum tangens erit verticalis, sed etiam radius osculi in eo loco erit infinite parvus.

Corollarium 3.

682. Quia in A est $dy = 0$; atque est $dy = dx \sqrt{p^2 - 1}$, erit pro puncto A, $p = 1$. Ex data ergo curvae constructione punctum A obtinebitur, si fiat $p = 1$. Integralia ergo illa ita debunt accipi ut x, s et y evanescant posito $p = 1$.

Corollarium 4.

683. Quoniam est $v = \frac{g ds dy^2}{2 dx ds}$, erit propter $ds = p dx$ et $ds^2 = dp dx$; $v = \frac{g p dx (p^2 - 1)}{2 dp}$, atque
ob

ob $dx = q dp$, erit $v = \frac{g p q (p p - 1)}{2} = \frac{g P (p p - 1)}{2 p^2}$. Vnde patet v euanescere si sit $p = 1$.

Corollarium 5.

684. Radius osculi in puncto quocunque M est $= \frac{ds^3}{dx dy} = \frac{ds^2 dy}{dx ds}$. Quare ob $ds = p dx$ erit radius osculi $r = \frac{p^2 dx \sqrt{(p^2 - 1)}}{dp} = p^2 q \sqrt{(p^2 - 1)} = \frac{P \sqrt{(p^2 - 1)}}{p}$. In puncto ergo A vbi est $p = 1$ erit radius osculi $r = 0$.

Corollarium 6.

685. Sit B punctum brachystochronae, in quo tangens est horizontalis; erit ibi $dy = \infty$ ideoque $p = \infty$. Punctum igitur B inuenietur ponendo $p = \infty$. Erit ergo in hoc puncto $v = \frac{g P}{2}$ et radius osculi $r = P$.

Exemplum I.

686. Ponamus resistantiam euanescentem ita vt motus fiat in vacuo, erit $k = \infty$, ideoque habebitur $ds d^3 s - 3 dds^2 = 0$. Quae aequatio diuisa per $ds dds$ et integrata dat $l dds - 3 l ds = l C$ seu $\frac{dds}{ds^3} = \frac{1}{a dx} = \frac{dx}{a dx^2}$. Haec aequatio denuo integrata dat $-\frac{1}{2 ds^2} = \frac{x}{a dx^2} + C$. Vel mutatis constantibue positoque $ds = p dx$; erit $-a = p p x + C p p$, quas quia posito $p = 1$, x debet euanescere, abit in hanc $x = \frac{a(p p - 1)}{p p}$ seu $p = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{(a-x)}}$, ideoque $ds = \frac{dx \sqrt{a}}{\sqrt{(a-x)}}$, quae est aequatio pro cycloide vt constat.

Exemplum 2.

687. Resistat medium in duplicata ratione celeritatum, erit $m=1$; atque $\frac{1}{p} = \frac{1}{k} \int \frac{dp}{p^2} = C - \frac{1}{kp}$. Vnde fit $P = \frac{kp}{ckp-1} = \frac{akp}{kp-a}$. Hanc ob rem erit $x = \int \frac{akdp}{p^2(kp-a)}$ et $s = \int \frac{akdp}{p(kp-a)}$. Fit ergo $s = k \int \frac{kp-a}{(k-a)p}$ atque $e^{\frac{s}{k}} = \frac{kp-a}{(k-a)p} = \frac{kds-adx}{(k-a)ds}$ ob $ds = p dx$. Porro ergo habebitur $(k-a) e^{\frac{s}{k}} ds = kds - adx$, quae integrata dat $k(k-a) e^{\frac{s}{k}} = ks - ax + k(k-a)$. Vel eliminata quantitate exponentiali $e^{\frac{s}{k}}$ erit $ks ds - ax ds - akds + akdx = 0$. At si exponentialem $e^{\frac{s}{k}}$ per seriem exprimere velimus, erit $k(k-a) e^{\frac{s}{k}} - k(k-a) = k(k-a) \left(\frac{s}{k} + \frac{s^2}{1 \cdot 2 \cdot k^2} + \frac{s^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot k^3} + \frac{s^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot k^4} + \text{etc.} \right)$. Quae series substituta dat $\frac{a(s-x)}{k-a} = \frac{s^2}{1 \cdot 2 \cdot k} + \frac{s^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot k^2} + \frac{s^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot k^3} + \text{etc.}$. In quovis puncto M est $v = \frac{g ak(p-p-1)}{2 p(kp-a)}$. Pro puncto B vero in quo tangens est horizontalis erit $s = k \int \frac{k}{k-a}$, atque $e^{\frac{s}{k}} = \frac{k}{k-a}$ et idcirco $x = -k + \frac{kk}{a} \int \frac{k}{k-a}$. Continuetur nunc curva ultra B in BNC, cuius natura ut inveniatur in axe BQ ponatur abscissa BQ = t , et arcus BN = z . His positis erit AP = $x = -k - t + \frac{k^2}{a} \int \frac{k}{k-a}$ et AMN = $s = z + k \int \frac{k}{k-a}$. Erit ergo $e^{\frac{s}{k}} = \frac{k}{k-a} e^{\frac{z}{k}}$; quibus valoribus in superiore aequatione substitutis prodibit: $k^2 e^{\frac{z}{k}} = -kz + k^2 + at$, seu

$at =$

Tab. XIV.
Fig 5.

$at = k^2(e^{\frac{z}{k}} - 1) - kz$. Atque per seriem $at = \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3k} + \frac{z^4}{1.2.3.4k^2} + \text{etc.}$ pro curua BNC; at pro ramo BMA in quo erit arcus BM, z negativus erit $at = k^2(e^{-\frac{z}{k}} - 1) + kz = \frac{z^2}{1.2} - \frac{z^3}{1.2.3.k} + \frac{z^4}{1.1.3.4.k^2} - \text{etc.}$ Curua vero BNC in C habebit quoque tangentem verticalem, quod punctum invenitur ponendo $dz = dt$. Fiet vero hoc posito $a = ke^{\frac{z}{k}} - k$, seu $z = kl \frac{a+k}{k} = \text{BNC}$. Atque $t = \text{CE} = k - \frac{kk}{a} l \frac{a+k}{k} = \frac{a}{2} - \frac{a^2}{3k} + \frac{a^3}{4k^2} - \text{etc.}$ cum contra fit $AD = \frac{a}{2} + \frac{a^2}{3k} + \frac{a^3}{4k^2} + \text{etc.}$ Ex quo apparet punctum A esse altius positum quam punctum C; atque in A et E curuam habere cuspides seu puncta reversionis, ita vt tam AD quam CE sint curuae diametri; id quod ex hoc intelligitur, quod sit $y = \int \frac{p dp \sqrt{(pp-1)}}{p^2}$, vbi $\sqrt{(p^2-1)}$ valorem habet tam affirmativum quam negativum.

Scholion I.

688. Infra perspicitur hanc curuam brachystochronam congruere cum curua tautochrona in eadem resistentiae hypothese. Haec vero inter motus tautochronos et brachystochronos interest differentia; vt ad tautochronismum obtinendum corpus in ramo CND descendere in altero ascendere debeat, cum e contrario pro brachystochronismo descensus per AMB fieri debeat. Interim tamen

Aaa 3

haec

374 CAPUT TERTIVM DE MOTV PVNCTI

haec vtriusque curvae conuenientia attentione digna videtur, cum et in vacuo eadem congruentia obseruetnr.

Exemplum 3.

689. Resistat medium in quadruplicata ratione celeritatum, ita vt sit $m=2$. Habebitur ergo pro curua quaesita ista aequatio: $dsd^3s-3dds^2 = \frac{gds^3dy^2}{2k^2ax}$. Ad construendam vero curuam $\frac{1}{p^2} = \frac{g}{k^2} \int (\frac{dp}{p^2} - \frac{dp}{p^4})$; vnde fit $P = \frac{kpv3np}{\sqrt{g(p^3-3np^2+n)}}$ atque $s = \int \frac{kdp\sqrt{3n}}{\sqrt{g(p^4-3np^3+np)}}$; et $x = \int \frac{kdp\sqrt{3n}}{p\sqrt{g(p^4-3np^3+np)}}$ ac $y = \int \frac{kdp\sqrt{3n}(pp-1)}{p\sqrt{g(p^4-3np^3+np)}}$. Huius ergo curuae constructio vti generalis habetur. Quia autem n numerum quemcunque denotat, sit $n=\frac{1}{2}$ erit $y = \int \frac{kdp\sqrt{3}}{p\sqrt{g(2p^2-p)}}$ $= \frac{2k\sqrt{3}(2p-1)}{\sqrt{g}p} - \frac{2k\sqrt{3}}{\sqrt{g}}$; quam constantem ideo adiecimus, quo fiat $y=0$ posito $p=1$. Atque posito $p=\infty$ erit applicata $DB = \frac{2k(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{\sqrt{g}}$. Fit autem $p = \frac{1}{\sqrt{2k^2-4ky\sqrt{3g}-gy^2}}$ atque $\sqrt{(p^2-1)} = \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{(96k^3y\sqrt{3g}-24gk^2y^2-8gky^3\sqrt{3g}-g^2y^4)}}{12k^2-4ky\sqrt{3g}-gy^2}$. Ex quo oritur $x = \int \frac{12k^2dy-4kydy\sqrt{3g}-gy^2dy}{\sqrt{(96k^3y\sqrt{3g}-24gk^2y^2-8gky^3\sqrt{3g}-g^2y^4)}}$ $= \int \frac{12k^2y-4kydy\sqrt{3g}-gy^2dy}{\sqrt{(9y^2+4ky\sqrt{3g})(24k^2-4ky\sqrt{3g}-gy^2)}}$, quae est aequatio inter coordinatas x et y pro curua quaesita.

Scholion 2.

690. In medio, quod in simplici celeritatum ratione resistit, brachystochronam simplicius determini-

terminare non licet, quam statim ex vniuersali constructione consequitur. Quamobrem hunc resistantiae casum exemplo non sumus prosecuti. Quod autem ad reliquas huc pertinentes propositiones attinet, in quibus curua quaeritur, super qua corpus descendens citissime ad datam lineam siue rectam siue curuam perueniat; ea simili modo pro resistente medio soluuntur, quo pro vacuo. Cum scilicet ex eodem puncto A innumerabiles egrediantur curuae brachystochronae; ex iis ea est eligenda, quae datae lineae siue rectae siue curuae ad angulos rectos occurrat; super hac enim corpus ad istam lineam breuissimo tempore peruenire capite praec. est demonstratum. Simili ratione curua, quae omnes brachystochronas ad angulos rectos traiecit, ab omnibus arcus abscindet isochronos, seu quos corpus descendens aequalibus temporibus absoluit. Haecque omnia eodem se habent modo, quaecumque fuerit resistantia, et quaecumque potentiae absolutae. Problema autem brachystochronarum generalissime conceptum euoluemus.

PROPOSITIO 78.

Problema.

591. *In medio resistente quocumque; et potentiis sollicitantibus quibuscumque; inuenire curuam brachystochronam AM, super qua corpus descendens ex A ad M citissime perueniat.*

Tab. XIV.
Fig. 6.

So-

Solutio.

Sit A motus initium; per quod ducatur recta quaecunque AP pro axe habenda, in qua sumatur abscissa $AP=x$; cui respondeat applicata $PM=y$ et arcus $AM=s$. Sit porro corporis in M celeritas debita altitudini v ; et resistentia utcunque a celeritate pendens $=R$. Quaecunque nunc corpus sollicitent potentiae absolutae, earum loco duae potentiae substitui possunt in datis directionibus ML et MN, quarum illa axi AP sit parallela, haec vero ad illum normalis. Vis autem corpus secundum ML sollicitans sit $=P$ et vis secundum MN $=Q$. Ex his viribus oritur $dv = Pdx + Qdy - Rds$. Atque natura brachystochronismi dat $\frac{2v}{r} = \frac{2vdxddy}{ds^3} = \frac{Pdy - Qdx}{ds}$ (673.) denotante r radium osculi curvae in M versus superiora directum; pro quo ergo sumto dx constante ponimus $\frac{+ds^3}{dxddy}$, cum alias deberet esse $r = \frac{-ds^3}{dxddy}$. Ex his ergo duabus aequationibus $dv = Pdx + Qdy - Rds$ et $\frac{2vdxddy}{ds^2} = Pdy - Qdx$, si eliminetur v , habebitur aequatio pro curua brachystochrona quaesita; est nempe $v = \frac{Pdyds^2 - Qdxds^2}{2dxddy}$: cuius differentiale loco dv , atque ipsum v in resistentia R substitutum dabit aequationem pro curua quaesita. Q. E. I.

Corollarium I.

692. Aequatio pro curua, si dicto modo v eliminetur fit differentialis tertii gradus. Quare si triplex integratio adhibeatur, tres quoque constantes adiici poterunt, quibus effici potest ut evanescente x simul quoque y et s et v evanescant, atque praeterea curua per datum punctum M transeat.

Corollarium 2.

693. Quia igitur semper curua brachystochrona potest exhiberi, quae initium habeat in A et per datum punctum transeat; infinitae curuae brachystochronae ex puncto A educi possunt.

Corollarium 3.

694. Inuenta aequatione pro curua brachystochrona AM , innotescet simul corporis super ea descendentis celeritas in singulis punctis; erit namque $v = \frac{Pdyds^2 - Qdxds^2}{2dxddy}$.

Corollarium 4.

695. Data celeritate determinari ex ea poterit tempus, quo corpus arcum AM absoluit: erit scilicet tempus per $AM = \int \frac{ds}{\sqrt{v}} = \int \frac{\sqrt{2dxddy}}{\sqrt{(Pdy - Qdx)}}$; quod propter aequationem inter x et y iam inuentam poterit saltem per quadraturas exhiberi.

Corollarium 5.

696. Si igitur curua esset inuenienda, quae omnes brachystochronas ex A eductas ad angu-

378 CAPUT TERTIUM DE MOTU PUNCTI

los rectos traicere deberet; tum eius lineae constructio haberetur, si ab omnibus abscinderetur $\int \frac{\sqrt{2dxddy}}{\sqrt{(Pdy-Qdx)}}$ eiusdem magnitudinis. Hac enim ratione ab istis curvis infinitis arcus isochroni abscinduntur, qui, quoniam omnes curvae sunt brachystochronae, terminabuntur ad trajectoriam orthogonalem.

Exemplum.

697. Sit resistantia quadratis celeritatum proportionalis; atque exponens resistantiae utcumque variabilis q ; erit $R = \frac{v}{q}$. Cum ergo sit $dv = Pdx + Qdy - \frac{vds}{q}$, erit integrando $e^{\int \frac{ds}{q}} v = \int e^{\int \frac{ds}{q}} (Pdx + Qdy)$. Cum autem sit $v = \frac{Pdyds^2 - Qdxds^2}{2dxddy}$ erit $2dx ddy \int e^{\int \frac{ds}{q}} (Pdx + Qdy) = \int e^{\int \frac{ds}{q}} ds^2 (Pdy + Qdx)$, in qua aequatione non amplius inest v . Interim tamen haec aequatio fit differentialis tertii gradus, si differentiatione signa integralia tollantur, Indeterminati praeterea ipsarum P , Q et q valores in causa sunt, quo minus aequatio ad constructionem praeparari queat.

Scholion.

698. Quae hic ex duabus potentiis P et Q circa curvas brachystochronas sunt deducta, latissime patent; quia, quotcumque potentiae corpus sollicitauerint, eae omnes in huiusmodi duas possunt

sunt resolui; si modo omnium directiones in eodem plano fuerint positae. Quamobrem in hac quoque propositione continentur brachystochronae pro quacunque virium centripetarum hypothese, quas autem, quia neque concinnae, neque construibiles aequationes proueniunt, ulterius non persequimur. Missis igitur his, in quibus celeritatum quaedam lex praescribitur, progredimur ad sequentes quaestiones, in quibus curuae requiruntur, quae a corpore super iis moto datam sustineant pressionem.

PROPOSITIO 79.

Problema.

699. In hypotesi grauitatis uniformis, et medio uniformi, quod in ratione quacunque celeritatum resistit, determinare curuam aequabilis pressionis AM, quae a corpore super ea descendente, ubique eandem sustineat pressionem.

Tab. XV.
Fig. 1.

Solutio.

Positis $AP = x$; $PM = y$; $AM = s$, et celeritatis in M altitudine debita $= v$; sit potentia corpus deorsum secundum ML trahens $= g$ et vis resistentiae in M $= \frac{v^m}{k^m}$. Erit ergo dum corpus

per elementum Mm progreditur $dv = g dx - \frac{v^m ds}{k^m}$

Ponamus curuam deorsum esse conuexam, ita vt

Bbb 2

MR

MR sit radii osculi directio, atque ipse radius osculi $MR = \frac{ds^3}{dx ddy}$ posito dx constante. Vis ergo centrifugae directio erit in normali MN; eiusque quantitas est $= \frac{2v dx ddy}{ds^3}$. Secundum eandem vero directionem curua premitur a vi normali ex resolutione potentiae $ML = g$ orta, quae est $= \frac{g dy}{ds}$. Tota ergo vis qua curua secundum MN premitur est $= \frac{g dy}{ds} + \frac{2v dx ddy}{ds^3}$; quae cum debeat esse constans ponatur ea aequalis ag , habebiturque $ag ds^3 = g dy ds^2 + 2v dx ddy$, atque hinc $v = \frac{ag ds^3 - g dy ds^2}{2 dx ddy}$. Sit $dx = p dx$, atque $dy = dx \sqrt{(p^2 - 1)}$; erit $ddy = \frac{p dp dx}{\sqrt{(p^2 - 1)}}$. His substitutis erit $v = \frac{(ag p^3 dx - g p^2 dx \sqrt{(p^2 - 1)}) \sqrt{(p^2 - 1)}}{2 p dp} = \frac{ag p^2 dx \sqrt{(p^2 - 1)} - g p dx (p^2 - 1)}{2 p dp}$. Sit porro $dx = 2 q dp$ erit $v = g p q (\alpha p \sqrt{(p^2 - 1)} - p^2 + 1)$ vel $v = P q$, posito $g p (\alpha p \sqrt{(p^2 - 1)} - p^2 + 1) = P$. Erit ergo $dv = P dq + q dP$ et $v^m = P^m q^m$. Quibus valoribus in aequatione $dv = g dx - \frac{v^m ds}{k^m}$ substitutis pro-

ducat $P dq + q dP = g dx - \frac{P^m q^m ds}{k^m}$. Est vero $dx = 2 q dp$ et $ds = p dx = 2 p dq dp$. Quamobrem proveniet ista aequatio: $P dq + q dP = 2 g q dp - \frac{2 P^m q^{m+1} p dp}{k^m}$, quae duas tantum continet variables p et q , quia P per p datur. Ad hanc aequationem construendam ponatur $q = \frac{1}{u}$; quo

facto obtinebitur ista aequatio $du + \frac{P u^m}{2 m p} = \frac{1}{2 m p}$

SVPER DATA LINEA IN MEDIO RES. 381

$\frac{2mpdp}{k^m P}$; quae ducta in $e^{\frac{2mgf dp}{P}}$ et integrata abit

in hanc $u = \frac{2me^{-2mgf \frac{dp}{P}}}{k^m} \int \frac{e^{\frac{2mgf dp}{P}} p dp}{P}$. Hinc er-

go inuenitur u per p , atque u inuento erit $q =$

$\frac{1}{Pu^{\frac{1}{m}}}$ atque $x = \int \frac{2dp}{Pu^{\frac{1}{m}}}$ et $s = \int \frac{2dp}{Pu^{\frac{1}{m}}}$ et $y = \int \frac{2dpV(p^2-1)}{Pu^{\frac{1}{m}}}$.

Cum autem sit $P = gp(\alpha pV(p^2-1) - p^2 + 1)$ erit $\frac{gdp}{P}$

$= \frac{dp}{p} + \frac{dp}{\alpha V(p^2-1)} + \frac{(1-\alpha^2)dp}{\alpha^2 p - \alpha V(p^2-1)}$ atque $\int \frac{gdp}{P} = \log p + \frac{1}{\alpha}$

$\log(p + V(p^2-1)) - \frac{(\alpha+1)}{2\alpha} \log \frac{\alpha p - V(p^2-1)}{p - V(p^2-1)}$ et $e^{\frac{2mgf dp}{P}} =$

$p^{2m} (p - V(p^2-1))^{\frac{m(\alpha-1)}{\alpha}} (\alpha p - V(p^2-1))^{-\frac{m(\alpha+1)}{\alpha}}$.

Est vero $\int \frac{e^{\frac{2mgf dp}{P}} p dp}{P} = \frac{e^{\frac{2mgf dp}{P}} p}{2mg} - \frac{1}{2mg} \int e^{\frac{2mgf dp}{P}} dp$.

Quocirca erit $u = \frac{p}{gk^m} - \frac{e^{-\frac{2mgf dp}{P}}}{gk^m} \int e^{\frac{2mgf dp}{P}} dp = \frac{p}{gk^m}$

$- \frac{\int p^{2m} (p - V(p^2-1))^{\frac{m(\alpha-1)}{\alpha}} (\alpha p - V(p^2-1))^{-\frac{m(\alpha+1)}{\alpha}} dp}{gk^m p^{2m} (p - V(p^2-1))^{\frac{m(\alpha-1)}{\alpha}} (\alpha p - V(p^2-1))^{-\frac{m(\alpha+1)}{\alpha}}}$

Cum igitur hoc modo ex p inueniri possit u ; curuae quaesitae constructio hinc perficietur. Q.E.I.

Corollarium I.

700. Curua inuenta ergo hanc habebit proprietatem, vt in quouis puncto M prematur ver-

382 CAPUT TERTIUM DE MOTU PUNCTI

fus MN vi constanti, quae est ad vim gravitatis ML, g ut α ad 1.

Corollarium 2.

701. Si pro α sumatur numerus negativus, curva ubique secundum MR directionem priori oppositam aequabiliter premetur. Hoc ergo casu curva debet esse concava deorsum, quia vis centrifuga contraria atque maior esse debet quam vis normalis, cuius directio semper in MN est sita.

Corollarium 3.

702. Si $\alpha = 0$; tum curva prodibit, quae nullam omnino pressionem a corpore sustinet: Quae ergo curva est ea ipsa, quam corpus projectum libere motum describit.

Corollarium 4.

703. Si $\alpha = 1$ seu tota pressio $= g$, tum curva erit convexa deorsum ubique. Nam quia vis normalis sola ubique est minor quam g nisi casu quo $ds = dy$; vis centrifuga cum ea conspirare debet, ideoque radius osculi in plagam ipsi MN oppositam cadere.

Corollarium 5.

704. Si ponatur $k^m e^{\frac{2mgf dp}{P}} u = 2mz$, erit $dz = e^{2mz}$

$e^{\frac{2mgf dp}{P}} p dp$. Particularis ergo solutio, quia in hac aequatione indeterminatae sunt a se inuicem separatae, habebitur si ponatur $P=0$. Hinc autem fit $gp(\alpha p \sqrt{p^2-1}) - p^2 + 1 = 0$, seu $\alpha p = \sqrt{p^2-1}$ siue $\alpha ds = dy$. Vnde prodit $\alpha s = y$. Satisfacit ergo recta angulum cum verticali AP constituens, cuius sinus est α sumto 1 pro sinu toto. Hoc enim casu vis centrifuga euanescit, et vis normalis fit $= \alpha g$.

Exemplum

705. Sit $\alpha=1$, seu quaeratur curua, quae ubique vi $=g$ prematur; quo casu integratio ipsius

$\frac{2mgf dp}{P}$ simplicior euadit: erit enim $e^{\frac{2mgf dp}{P}} = p^{2m}$
 $(p - \sqrt{p^2-1})^{-2m} = (\frac{p}{p - \sqrt{p^2-1}})^{2m} = (p^2 + p\sqrt{p^2-1})^{2m}$.

Hanc ob rem erit $u = \frac{p \int (p^2 + p\sqrt{p^2-1})^{2m} dp}{g k^m (p^2 + p\sqrt{p^2-1})^{2m}}$.

Quae aequatio quoties $2m$ est numerus integer integrationem admittit. Posito enim $p^2 + p\sqrt{p^2-1} = \frac{r+1}{2}$;

erit $p = \frac{r+1}{2\sqrt{r}}$ atque $u = \frac{r+1}{2g k^m \sqrt{r}}$

$\frac{1}{4g k^m (r+1)^{2m}} \int \frac{(r-1)(r+1)^{2m} dr}{r \sqrt{r}}$. Est autem hac

positione $r = 2p^2 - 1 + 2p\sqrt{p^2-1}$, seu $\sqrt{r} = p + \sqrt{p^2-1}$. Vt si fuerit $m = \frac{1}{2}$ seu resistentia

celeritatibus proportionalis erit $u = \frac{r+1}{2g \sqrt{k} r} - \frac{1}{4g(r+1)\sqrt{k}} \int \frac{(r^2-1)dr}{r^2 \sqrt{r}}$.

$\int \frac{(r^2-1)dr}{r\sqrt{r}} = \frac{1}{2g\sqrt{k}} \left(\frac{r+1}{\sqrt{r}} - \frac{r^2+6\sqrt{r}-3}{3(r+1)\sqrt{r}} \right) = \frac{2rr+6r+6\sqrt{r}}{6g(r+1)\sqrt{kr}}$ seu
 mutata constante \mathfrak{E} est $u = \frac{r\sqrt{r}+3\sqrt{r}+2\mathfrak{E}}{3g(r+1)\sqrt{k}}$. Posito
 autem loco r eius valore erit $u = \frac{p^2+1+p\sqrt{(p^2-1)}}{3g\sqrt{k}}$
 $+ \frac{\mathfrak{E}}{3g(p^2+p\sqrt{(p^2-1)})\sqrt{k}}$. Sit $\mathfrak{E}=0$; erit $u^{\frac{1}{m}} = u^2 =$
 $\frac{(p^2+1+p\sqrt{(p^2-1)})^2}{9g^2kp^2}$, et propter $P=g\sqrt{p(p-\sqrt{(p^2-1)})}$
 $\sqrt{(p^2-1)}$, erit $Pu^{\frac{1}{m}} = \frac{(p-\sqrt{(p^2-1)})(p^2+1+p\sqrt{(p^2-1)})^2\sqrt{(p^2-1)}}{9gkp}$
 atque $x = \frac{2gk}{3p^2-1-3p\sqrt{(p^2-1)}} - 2gkl(3p^2-1-3p\sqrt{(p^2-1)})$.

Scholion.

706. Similis integratio formulae, cui u est
 aequalis, etiam succedit si $\alpha=-1$, quo casu pro-
 dit, concaua deorsum in qua vis centrifuga con-
 traria est et maior quam vis normalis, quippe ex-
 cessus est $=g$. Eadem vero ipsa prodit aequa-
 tio, quae pro casu $\alpha=1$, nisi quod signum ipsius
 $\sqrt{(p^2-1)}$ debet immutari. Quod ad reliquas quae-
 stiones huc pertinentes attinet, in quibus aliae pres-
 sionum leges proponuntur; eae vel ad nimis pro-
 lixos calculos deducunt; vel iam sunt pertracta-
 tae. Vidimus enim curvas, in quibus pressio to-
 talis sit duplo maior, quam vel sola vis centri-
 fuga vel sola normalis, esse brachystochronas, at-
 que curvas in quibus alia obtinet ratio, supra
 quoque iam pertractauimus, cum curvas inuestiga-
 remus, super quibus motus quam minime accele-
 raretur. Sequitur ergo, ut ad curvas inuenien-
 das

das progrediamur, super quibus plures diuersi descensus vel ascensus datam inter se teneant leges, quae quaestiones plurimum difficultatis in se habent. Necesse enim est ad huiusmodi problemata soluenda, vt celeritas corporis in singulis locis possit exprimi per quantitates, quibus curuae natura determinatur. Quod autem cum non in quauis resistentiae hypothesi possit perfici, vti supra notauimus; tales quaestiones tantum pro specialibus resistentiae hypothesibus poterunt proponi. Praecipue ergo ista tractatio ad resistentiam quadratis celeritatum proportionalem est accommodanda; quia hoc casu aequatio canonica, qua celeritas determinatur, separationem variabilium admittit, atque ipsa celeritas potest exhiberi. Tum etiam considerari potest resistentia, quae biquadratis celeritatum est proportionalis; cum pro hac hypothesi celeritas quodammodo cognoscatur. Denique quaecunque fuerit resistentiae lex, si modo resistentia est valde parua, huiusmodi quaestiones solutu faciliores euadent. In his vero problematis vel ratio celeritatum, quae in diuersis descensibus super eadem curua acquiruntur, inuestigatur; vel temporum, quibus diuersi descensus aut ascensus absoluuntur, ratio. Atque in vtroque genere, ex data vel temporum vel celeritatum variis descensibus acquisitarum ratione ipsae curuae sunt inueniendae.

PROPOSITIO 80.

Problema.

Tab. XV.
Fig. 2.

707. In medio uniformi, quod resistit in duplicata ratione celeritatum, atque potentia absoluta deorsum tendente; comparare inter se celeritates in puncto A, quae in diuersis descensibus corporis super curua MA acquiruntur.

Solutio.

Sit celeritas in A quam vno descensu acquirit debita altitudini b , et celeritas in M debita altitudini v . Ponantur $AP = x$, $AM = s$, potentia sollicitans in M quae sit vtcunque variabilis $= P$; atque exponens resistentiae $= k$. His positis erit $dv = -Pdx + \frac{vds}{k}$, quae aequatio integrata dat $v = e^{\frac{s}{k}}(b - \int e^{-\frac{s}{k}} P dx)$ integrali $\int e^{-\frac{s}{k}} P dx$ ita accepto vt euanescat posito $x = 0$. Sit nunc M initium descensus vbi est $v = 0$, inuenietur hoc punctum ex aequatione $b = \int e^{-\frac{s}{k}} P dx$. Iam ponatur alius descensus fieri ex puncto proximo m , atque celeritas in A acquisita sit debita altitud. $b + db$. Erit ergo $b + db = \int e^{-\frac{s}{k}} P dx =$ summae omnium $e^{-\frac{s}{k}} P dx$ ab A vsque ad m ; in aequatione vero priore $\int e^{-\frac{s}{k}} P dx$ significat summam omnium $e^{-\frac{s}{k}} P dx$ ab A vsque ad M tantum. Illa ergo summa superat hanc summam ultimo elemento $e^{-\frac{s}{k}} P dx$

Pdx existente $AM=s$ et $Pp=dx$. Erit ergo $db = e^{-\frac{s}{k}} Pdx$. Ex qua aequatione datur relatio inter arcum MA descensu percursum et inter celeritatem in puncto infimo A acquisitam. Q.E.I.

Corollarium I.

708. Dato ergo arcu descensus $AM=s$; erit altitudo celeritati in A acquisitae debita, $b = \int e^{-\frac{s}{k}} Pdx$. Seu si punctum M et celeritas in A tanquam variabiles quantitates considerantur, erit aequatio inter eas $db = e^{-\frac{s}{k}} Pdx$.

Corollarium 2.

709. Ex hac ergo aequatione, si proposita fuerit quaecunque ratio inter arcus descensus et celeritates in puncto A acquisitas; inuenietur aequatio pro curua AM propositae conditioni satisfaciens.

Corollarium 3.

710. Si medium non fuerit vniforme sed difforme vtcunque, existente eius exponente $=q$; loco aequationis inuentae prodibit ista aequatio $db = e^{-\frac{s}{q}} Pdx$, cuius similis est vsus.

Corollarium 4.

711. Quia valor ipsius e est vnitate maior, quippe 2, 718218284, erit $e^{-\frac{s}{q}}$ seu $e^{-\frac{s}{k}}$ vnitate minor;
Ccc 2 et

et hanc ob rem $db < Pdx$. In vacuo vero esset $db = Pdx$.

Scholion I.

712. Simili modo res se habet in ascensu, quando corpus celeritate altitudini b debita ex A per arcum $AM = s$ ascendit. Tum enim erit $db = e^{\frac{s}{h}} Pdx$ vel in medio difformi $db = e^{\frac{\int ds}{a}} Pdx$. Quae formulae ex illis descensui inferuientibus inuenientur ponendo $-s$ loco $+s$; qua substitutione semper descensus in ascensum transmutatur. Hinc apparet quemadmodum pro descensu semper erat $db < Pdx$, ita fore pro ascensu semper $db > Pdx$, quia $e^{\frac{s}{h}}$ seu $e^{\frac{\int ds}{a}}$ est unitate maior.

Corollarium 5.

713. In medio ergo resistente neque pro ascensu neque pro descensu esse potest $b = \int Pdx$ vel $b = \alpha \int Pdx$; tum enim foret $e^{\frac{s}{h}} = \alpha$; seu $s = \text{const.}$ in qua aequatione nulla linea continetur.

Corollarium 6.

714. Neque etiã curua poterit inueniri, pro qua vel in descensu vel in ascensu foret $b = \int Qdx$; denotante Q functionem quamcunq; ipsarum s et x , nisi Q ita sit comparata ut $\frac{Q}{P}$ fiat $= 1$ positis s et $x = 0$.

Fit

Fit enim $e^{\frac{\pm f ds}{a}} P = Q$ et $e^{\frac{\pm f ds}{a}}$ abit in 1 posito $s = 0$.

Scholion 2.

715. Ratio huius est, quod posuimus s euanesce euanescente x ; atque hanc ob rem aequatio $db = e^{\frac{\pm f ds}{a}} P dx$ ita debet integrari, ut euanescat posito $x = 0$. Si autem b ita detur, ut db per dx exprimatur, aequatio per dx diuidi poterit. Quocirca ea ad hanc legem non potest accommodari, nisi forte sponte aequatio hac proprietate iam gaudeat. Sin autem datus ipsius b valor talis fuerit, ut effiet $db = R ds$, seu $b = \int R ds$ euanescente b facto $s = 0$; tum aequatio pro curua quaesita erit $R ds = e^{\frac{\pm f ds}{a}} P dx$, quae semper est pro curua reali, dummodo $\int R ds$ habeat valorem affirmatiuum, prodeatque $ds > dx$ seu $e^{\frac{\pm f ds}{a}} P > R$.

Exemplum I.

716. Sit potentia sollicitans vniformis, seu $P = g$, et medium resistens vniforme, requiraturque curua MA hanc habens proprietatem, ut corpus in singulis descensibus ad A vsque acquirat celeritates, quae sint in subduplicata ratione arcuum descensu percursorum. Erit ergo \sqrt{b} ut

$$\sqrt{s} \text{ seu } b = as; \text{ vnde fit } a ds = g e^{-\frac{3}{k}} dx \text{ seu } a e^{\frac{s}{k}} ds = g dx$$

Ccc 3

390 CAPUT TERTIUM DE MOTU PUNCTI

$= g dx$, cuius integralis est $ak(e^{\frac{s}{k}} - 1) = gx$; addita constante, quo fiat $x=0$ euanescente s . Habebitur ergo $e^{\frac{s}{k}} = \frac{ak+gx}{ak}$ atque $\frac{s}{k} = l(ak+gx) - lak$. Quae differentiata dat $\frac{ds}{k} = \frac{gdx}{ak+gx}$; ex quo intelligitur curuam esse tractoriam filo longitudinis k super basi horizontali a puncto A deorsum distante interuallo $\frac{ak}{g}$. Construetur ergo curua hoc modo: super basi horizontali CE et filo BC $= k$ describatur tractoria BA; tum ducatur horizontalis DA a CE ad distantiam DC $= \frac{ak}{g}$; quo facto satisfaciet curuae portio BA quaesito. Ponimus autem BC verticalem et B punctum tractoriae summum; ex quo intelligitur α necessario minus esse debere quam g . Si enim esset maior foret $CD > CB$, ideoque punctum A imaginarium. Sin autem esset $\alpha = g$, punctum A in B caderet, adeoque nonnisi punctum satisfaceret. Si fuerit $\alpha = 0$, punctum A infinite distaret, et corpus descendens omnem amitteret celeritatem. Cum igitur debeat esse $\alpha < g$ erit $b < gs$.

Tab. XV.
Fig. 3.

Exemplum 2.

Tab. XV.
Fig. 4.

717. In superiori tam resistentiae quam potentiae sollicitantis hypothese quaeratur curua AMF super qua omnes ascensus ex puncto A facti ita se habeant; vt toti arcus ascensibus singulis absoluti sint quadratis celeritatum initialium in A proportion-

portionales. Erit ergo vt ante $b=as$; atque $db=ads$. Cum autem pro ascensibus fit $db=ge^{\frac{s}{k}}$ dx , erit $ae^{-\frac{s}{k}}ds=gdx$, atque integrando $\alpha k(1-e^{-\frac{s}{k}})=gx$. Hinc igitur habetur $e^{-\frac{s}{k}}=\frac{\alpha k-gx}{\alpha k}$; atque $\frac{ds}{k}=\frac{gdx}{\alpha k-gx}$ seu $(\frac{\alpha k}{g}-x)\frac{ds}{dx}=k$. Ex quo apparet curuam satisfaciendam esse iterum tractoriam super basi horizontali CE filo longitudinis k constructam; sed deorsum spectantem, cuius cuspis sit in B existente $BC=k$. Sumatur autem $CD=\frac{\alpha k}{g}$; ductaque horizontali DA erit A punctum in quo ascensus omnes incipere debent. Hinc ergo quoque intelligitur α non posse esse maius quam g ; quia alias punctum A foret imaginarium. At si fuerit $\alpha=g$ seu $b=gs$ incidet A in B eritque arcus quolibet ascensu percursus $=\frac{b}{g}$.

Scholion 3.

718. Plura huiusmodi exempla, quia tam facile ex vniuersali formula inuenta resolui possunt, hic praetermitto; neque etiam huiusmodi quaestiones pro aliis resistentiae hypothesibus, quibus solutio earum inueniri queat, afferro; quoniam tales quaestiones neque iam sunt agitatae, neque satis sunt curiosae, vt earum solutiones requirantur. Ad digniora igitur progredior problemata, in quibus curuae quaeruntur tautochronae, super quibus omnes vel ascensus vel descensus aequalibus absoluantur temporibus.

PRO-

PROPOSITIO 81.

Problema.

Tab. XV.
Fig. 2.

719. In hypotthesi potentiae uniformis deorsum directae et medio uniformi, quod resistit in duplicata ratione celeritatum inuenire curuam tautochrōnam AM, super qua omnes descensus ad punctum A vsque absoluantur aequalibus temporibus.

Solutio.

Consideretur quicunque descensus, in quo celeritas quam corpus in puncto infimo A acquirat, debita sit altitudini b . Ponantur $AP = x$; $AM = s$; altitudo celeritati in M debita $= v$; atque potentia sollicitans $= g$ et medii exponens $= k$, ita vt resistentia in M sit ad vim grauitatis vt $\frac{v}{k}$ ad 1. His positis erit $dv = -gdx + \frac{vds}{k}$; quae aequatio integrata dat $v = e^{\frac{s}{k}}(b - \int e^{-\frac{s}{k}} g dx)$

integrali $\int e^{-\frac{s}{k}} g dx$ ita sumto vt euanescat posito x vel $s = 0$. Ex hac ergo aequatione initium descensus inuenitur ponendo $v = 0$ seu $\int e^{-\frac{s}{k}} g dx = b$. Tempus vero quo arcus MA absoluitur hinc erit

$$= \int \frac{ds}{e^{\frac{s}{k}} \sqrt{b - \int e^{-\frac{s}{k}} g dx}}, \text{ ex quo prodibit totius de-}$$

scensus tempus, si post integrationem fiat $\int e^{-\frac{s}{k}} g dx = b$. Ponamus breuitatis gratia $\int e^{-\frac{s}{k}} g dx = t$,
et

et $\frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}} = du$, ita ut sit tempus totius descensus

$= \int \frac{du}{\sqrt{(b-t)}}$, posito post integrationem $t=b$. Quo nunc haec expressio perpetuo eundem obtineat obtineat valorem, debet $\int \frac{du}{\sqrt{(b-t)}}$ esse functio nullius dimensionis ipsarum b et t , ut posito $t=b$ ex formula b evanescat. Hanc ob rem du debet esse functio dimidia dimensionis ipsius t tantum, quia u a b pendere non potest. Fieri ergo necesse est $du = \frac{\alpha dt}{\sqrt{t}}$ existente α quantitate constante b non continente. Hoc posito erit tempus unius descensus $= \alpha \int \frac{dt}{\sqrt{(bt-t^2)}}$, posito post integrationem $t=b$. Vel posita ratione diametri ad peripheriam $1:\pi$ erit tempus unius descensus $= \alpha\pi$; qui valor perpetuo idem manet quomocunque b seu descensus initium mutetur. Curva ergo tautochrone quaesita determinabitur ex hac aequatione

$$du = \frac{\alpha dt}{\sqrt{t}} = \frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}}, \text{ cuius integralis est } 2\alpha\sqrt{t} = 2k$$

$(1 - e^{\frac{-s}{2k}})$ seu $t = \frac{k^2}{\alpha^2} (1 - e^{\frac{-s}{2k}})^2$ addita scilicet constante, quae faciat t evanescere posito $s=0$. Cum

autem sit $t = \int e^{\frac{-s}{k}} g dx$, erit $dt = e^{\frac{-s}{k}} g dx = \frac{k}{\alpha^2}$

$(1 - e^{\frac{-s}{2k}}) e^{\frac{-s}{2k}} ds$. Ponamus $\alpha^2 g = a$ seu $\alpha = \sqrt{\frac{a}{g}}$;

erit $adx = k(e^{\frac{s}{2k}} - 1) ds$, cuius integralis est ax

$= 2k^2(e^{\frac{s}{2k}} - 1) - ks$, quae quidem aequationes,

Tom. II. Ddd quia

quia variables s et x a se inuicem sunt separatae ad curuam construendam sufficiunt. Sin autem aequatio ab exponentialibus libera desideretur, quia ex altera aequatione est $k(e^{\frac{s}{2k}} - 1) = \frac{ax + ks}{2k}$; erit hoc valore in altera substituto $axds + ksd s = 2akdx$. Q. E. I.

Corollarium I.

720. Quia est $a = V \frac{g}{g}$; erit tempus vnus descensus $= \pi V \frac{a}{g}$. In vacuo autem et grauitate $= 1$, est tempus descensus penduli $f = \frac{\pi \sqrt{2f}}{2}$ (166). Quare longitudo penduli isochroni in vacuo est $= \frac{2a}{g}$.

Corollarium 2.

721. Si igitur fuerit $\frac{2a}{g} = 3166$ part. millimarum pedis Rhenani, descensus absoluetur dimidio minuto secundo; hoc ergo euenit si sit $a = 1583g$ scrup. ped. Rhen.

Corollarium 3.

722. Altitudo celeritati in M debita seu v est $= e^{\frac{s}{k}}(b - \int e^{\frac{-s}{k}} g dx) = e^{\frac{s}{k}}(b - t)$ atque ob $t = \frac{gk^2(1 - e^{\frac{-s}{2k}})^2}{a}$ erit $v = e^{\frac{s}{k}}(-\frac{gk^2}{a}(1 - e^{\frac{-s}{k}})^2) = \frac{abe^{\frac{s}{k}} - gk^2(e^{\frac{s}{2k}} - 1)^2}{a}$.

Co-

Corollarium 4.

723. Posito $v=0$, prodibit totus arcus descensus ex hac aequatione $ab = gk^2(1 - e^{\frac{-s}{2k}})^2$. Si ergo arcus descensus ponatur $=f$, erit $ab = gk^2(1 - e^{\frac{-f}{2k}})^2$. Quare dato arcu descensus f erit $v = \frac{gk^2 e^{\frac{s}{k}}}{a}((1 - e^{\frac{-f}{2k}})^2 - (1 - e^{\frac{-s}{2k}})^2)$.

Corollarium 5.

724. Aequatio pro curua haec $ax = 2k^2(e^{\frac{s}{2k}} - 1) - ks$ in seriem exponentiali $e^{\frac{s}{2k}}$ conuertendo, quae est $1 + \frac{s}{2k} + \frac{s^2}{1 \cdot 2 \cdot 2k^2} + \frac{s^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 8k^3} + \text{etc.}$ abit in hanc $ax = \frac{s^2}{1 \cdot 2 \cdot 2} + \frac{s^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4k} + \frac{s^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 8k^2} + \text{etc.}$ seu $2ax = \frac{s^2}{1 \cdot 2} + \frac{s^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2k} + \frac{s^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4k^2} + \text{etc.}$

Scholion I.

725. Notari hic conuenit hanc curuam simili aequatione exprimi, qua supra brachystochrona ascensui inseruiens exprimebatur; ibi enim erat $at = \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3k} + \frac{z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot k^2} + \text{etc.}$ (687), quae aequatio ab hac nostra pro tautochrone inuenta in hoc tantum differt, quod hic sit $2a$ quod ibi erat a , atque exponens resistentiae brachystochronae duplo maior est exponente resistentiae pro tautochrone. Curua ergo brachystochrona quoque ad tautochronismum producendum accom-

Ddd 2

moda.

modari potest; arcu ascensus descensui tributo, in medio resistente, cuius exponens est duplo minor.

Corollarium 6.

726. Ad inveniendam continuationem curvae MA ultra A poni debet s negativum, quo facto habebitur $ax = 2k^2(e^{\frac{-s}{2k}} - 1) + ks$ vel $2ax = \frac{s^2}{1.2} - \frac{s^3}{1.2.3.2k} + \frac{s^4}{1.2.3.4.4k^2} - \text{etc.}$ Quae eadem aequatio prodisset, si k negativum fecissemus. Facto autem k negativo descensus mutatur in ascensum; quocirca curua MA ultra A continuata ascensui inferuiet atque super ea omnes ascensus eodem absoluentur tempore scilicet $\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$.

Corollarium 7.

Tab. XV.
Fig 5.

727. Eadem ergo curua continua BMANC erit tautochrone tam pro descensu quam pro ascensu. Namque super arcu BMA omnes descensus eodem tempore absoluntur, atque super arcu ANC omnes ascensus. Quare omnes dimidiaae oscillationes, quae in arcu BMA incipiunt, erunt inter se isochronae, atque tempus vnus semioscillationis erit $= 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$.

Corollarium 8.

728. Si resistentia euanesceat, quo casu k fit ∞ , curua haec in cycloidem abire debet, quae est

est curua tautochrone in vacuo. Hoc ipsum aequatio per seriem expressa indicat, fit enim $2ax = \frac{s^2}{1.2}$ seu $4ax = s^2$ aequatio pro cycloide.

Corollarium 9.

729. Curua ergo BMANC prout cyclois habebit cuspides verticales in B et C, ad quas inueniendas ponatur $dx = ds$, eritque pro arcu BMA, $a = k(e^{\frac{s}{2k}} - 1)$ seu $s = 2k \log \frac{a+k}{k} = \text{AMB}$; atque eius altitudo BD erit $= 2k - \frac{2k^2}{a} \log \frac{a+k}{k}$. Pro arcu ascensus vero ANC erit $\text{ANC} = 2k \log \frac{k}{k-a}$, et $\text{CE} = \frac{2k^2}{a} \log \frac{k}{k-a} - 2k$. Siue per series erit $\text{BD} = a - \frac{2a^2}{3k} + \frac{2a^3}{4k^2} - \frac{2a^4}{5k^3} + \text{etc.}$ Atque $\text{CE} = a + \frac{2a^2}{3k} + \frac{2a^3}{4k^2} + \frac{2a^4}{5k^3} + \text{etc.}$

Corollarium 10.

730. Ex his perspicitur cuspidem C arcus ascensus eleuationem esse cuspidem A arcus descensus. Atque arcus ANC cuspidis in infinitum abit si $k = a$; et si $a > k$ cuspis C erit imaginaria. Ceterum ex aequatione patet, tam BC quam CE esse diametros curuae inuentae.

Corollarium II.

731. Si corpus in dimidia oscillatione habuerit celeritatem altitudini b debitam, erit arcus descensus $= 2k \log \frac{k\sqrt{g} + \sqrt{ab}}{k\sqrt{g} - \sqrt{ab}}$ seu per seriem $= \frac{2kab}{\sqrt{g}} + \frac{2ab^3}{2gk}$

$$\frac{2ab}{2gk} + \frac{2ab\sqrt{ab}}{3gk^2\sqrt{g}} + \text{etc.} \text{ atque sequens arcus ascensus} = \\ \frac{2k}{2k} \sqrt{\frac{k\sqrt{g} + \sqrt{ab}}{k\sqrt{g}}} = \frac{2\sqrt{ab}}{2gk} - \frac{2ab}{2gk} + \frac{2ab\sqrt{ab}}{3gk^2\sqrt{g}} - \text{etc.}$$

Corollarium 12.

732. Si ergo descensus fiat ex puncto B ita ut arcus descensus sit $= AMB = 2k \sqrt{\frac{a+k}{k}}$ erit $b = \frac{ga k^2}{(a+k)^2}$, sequentis vero ascensus arcus erit $= 2k \sqrt{\frac{2a+k}{a+k}}$.

Corollarium 13.

733. Ex aequatione pro hac curua apparet curuam in puncto A habituram esse tangentem horizontalem. Cum porro posito ds constante radius osculi in M sit $= \frac{ds dy}{d dx} = \frac{ds \sqrt{(ds^2 - dx^2)}}{d dx}$; quia est $dx = \frac{k}{a} (e^{\frac{s}{2k}} - 1) ds$, s erit $d dx = \frac{1}{2a} e^{\frac{s}{2k}} ds^2$ et $\sqrt{(ds^2 - dx^2)} = ds \sqrt{(1 - \frac{k^2}{a^2} (e^{\frac{s}{2k}} - 1)^2)}$; erit radius osculi in M $= \frac{\sqrt{(4a^2 - 4k^2 (e^{\frac{s}{2k}} - 1)^2)}}{e^{\frac{s}{2k}}}$. Posito ergo $s = 0$ erit radius osculi in puncto infimo A $= 2a$. In B vero et C radius osculi euanescit.

Corollarium 14.

734. Radius osculi non est maximus in puncto infimo A; sed per methodum maximorum maximus inuenitur in arcu ascensus, idque in puncto

cto O existente $AO = 2kl \frac{k^2}{k^2 - a^2}$. In hoc enim puncto est radius osculi $= \frac{2ak}{\sqrt{(k^2 - a^2)}}$. Ex quo concluditur nisi sit $k > a$, curvaturam curvae ANC perpetuo diminui, neque punctum O usquam existere.

Scholion. 2.

735. Hoc igitur problemate duas inuenimus curuas, super quarum altera omnes descensus, super altera vero omnes ascensus aequalibus absoluntur temporibus. Atque cum super tota curua BAC omnes itus seu semioscillationes aequalibus peragantur temporibus, si quidem in curuae portione BA incipiant; haec curua ad oscillationes in fluido isochronas faciendas esset idonea, si modo reditus quoque inter se essent isochroni, de quo vero non constat. Quia autem in fluidis praeter resistantiam quadratis celeritatum proportionalem alia insuper obseruatur, quam momentis temporum proportionalem seu constantem esse probabile est; etiam coniunctim cum ista resistantia tautochronam determinare operae pretium est; quod vero facile ex praecedente effici potest. Sit enim resistantia constans $= h$, erit pro descensu $dv = -gdx + hds + \frac{vds}{k}$. Quare si in priore operatione tantum loco gdx vbique $gdx - hds$ substituatur, tautochrona satisfaciens simili modo obtinebitur; pro descensu scilicet prodibit ita curua $ax = (\frac{ab}{g} - k)s + 2k^2(e^{\frac{s}{2k}} - 1)$; atque pro ascensu vero haec

$ax =$

$ax = (k - \frac{ab}{g})s + 2k^2(e^{\frac{-s}{2k}} - 1)$, quae curua quoque cum priore eandem curuam continuam constituit, abit enim altera in alteram ponendo s negativum. Notandum hic est si fuerit $k = \frac{ab}{g}$ fore curuam tautochronam tractoriam BAF asytmotam habentem horizontalem CE, quae a puncto A distet interuallo $AE = \frac{2k^2}{a}$. Fili autem longitudo, quo haec tractoria describitur, est $= 2k$. Quod autem super huiusmodi curua tangentem horizontalem nusquam habente semioscillatio absolui possit, atque alicubi punctum aequilibræ A existere, mirum non est; cum, vt supra iam obseruauimus, in tali resistentiae hypothesi, corpus in loco subsistere queat decliui. His autem casibus, quibus curua vltra A descendere pergit nulli redditus atque ideo nullae oscillationes peragi possunt, quia corpus, quanquam super plano decliui ad quietem peruenire potest, tamen super eo ascendere nequit; in quouis enim curuae portione AF puncto corpus in quiete perseverare potest.

Scholion 3.

736. Non multo difficilior fit problematis solutio, si potentia deorsum tendens non constans, sed variabilis vtcunque P, atque exponens resistentiae etiam variabilis q ponatur. Habebitur enim pro elemento temporis in descensu

$$\frac{ds}{e^{\frac{1}{2} \int \frac{ds}{q} V(b - \int e^{-\frac{ds}{q}} P dx)}}. \quad \text{Si nunc vt ante ponatur}$$

$$\int e^{-\frac{ds}{q}}$$

se $e^{-\frac{1}{2} \int \frac{ds}{q}} P dx = t$; et $\frac{ds}{e^{\frac{1}{2} \int \frac{ds}{q}}} = du$; debet quoque

esse $du = \frac{\alpha dt}{\sqrt{t}}$ seu $t = \frac{\alpha^2 dt^2}{du^2} = \frac{\alpha^2 P^2 dx^2}{e^{\frac{1}{2} \int \frac{ds}{q}} ds^2}$. Quae ac-

quatio denuo differentiata posito ds constante et loco dt eius valore substituto dabit $\frac{q ds^2}{2 \alpha^2} = P q dx + q dP dx - 2 P dx ds$ pro curua descensus isochronos habente; Huiusque curuae continua ultra A ascensibus inferuiet.

Scholion 4.

737. Tautochronam hanc in hypothesi resistentiae quadratis celeritatum proportionalis primus ego dedi in Comment. Tomo IV. vbi eadem, qua hic, sum vsus methodo. Deinceps vero etiam Cel. *Ioh. Bernoulli* mihi per literas significauit, se quoque in eadem resistentiae hypothesi istam tautochronam reperisse; cuius methodus extat in Comm. Acad. Paris. A. 1730. In aliis vero resistentiae hypothesibus, excepta ea, quae ipsis celeritatibus est proportionalis, nemo adhuc, quantum mihi constat, tautochronas determinauit. Quod enim ad eas curuas attinet, quas in Aët. Lips. A. 1726. tautochronarum nomine dedi; eae quaesito non satisfaciunt; vti Cel. *Hermannus*, qui primum in easdem inciderat, atque ego postea monstraui. Difficultas autem methodi huius tautochronas inueniendi in hoc

consistit, quod in aliis resistentiae hypothesibus celeritas non possit vniuersaliter ex aequatione canonica determinari. Quomodo vero nihilominus pro aliis resistentiis tautochronae inuestigari queant, ex sequente propositione colligi poterit; in qua pro mediis rarissimis in quacunque celeritatum ratione multiplicata resistentibus tautochronae inueniendae proponuntur.

PROPOSITIO 82.

Problema.

Tab. XV.
Fig. 2.

738. *In medio rarissimo, quod resistit in quacunque multiplicata ratione celeritatum, et hypothese potentiae uniformis deorsum tendentis, determinare curuam tautochronam AM, super qua vel omnes descensus vel ascensus aequalibus absoluantur temporibus.*

Solutio.

Positis abscissa $AP = x$ et arcu $AM = s$; sit totus arcus descensu aliquo descriptus $= f$. Potentia sollicitans deorsum ponatur $= g$ altitudo celeritati in M debita sit $= v$, exponens resistentiae $= k$, atque ipsa resistentiae vis $= \frac{v^m}{k^m}$, vbi k est quantitas valde magna ita vt fractiones, quae in denominatore k plurium quam m dimensionum habent, pro euanescentibus haberi queant. His positis erit ex natura descensus $dv = -gdx + \frac{v^m ds}{k^m}$

$\frac{v^m ds}{k^m}$. Iam si resistentia prorsus abesset, curua quesita esset cyclois, cuius aequatio est $gx = as^2$; quia autem medium est rarissimum, curua quaesita non multum a cycloide differet; ponatur igitur aequatio pro curua quaesita haec $gx = as^2 + \frac{\xi s^n}{k^m}$. Quia ve-

ro est $dv = -gdx + \frac{v^m ds}{k^m}$ propter terminum $\frac{v^m ds}{k^m}$ valde paruum erit proxime $v = C - gx = Cas^2 - \frac{\xi s^n}{k^m}$, vbi constans C ex hoc determinatur, quod si fit $s = f$ fiat $v = 0$. Quocirca erit $v = a(f^2 - s^2) + \frac{\xi}{k^m}(f^n - s^n)$ quam proxime. Ponatur ergo $v = a$

$(f^2 - s^2) + \frac{\xi}{k^m}(f^n - s^n) + Q$, erit $dv = -2asds - \frac{n\xi s^{n-1} ds}{k^m} + dQ = -gdx + \frac{v^m ds}{k^m} = -2asds - \frac{n\xi s^{n-1} ds}{k^m} + \frac{\alpha^m (f^2 - s^2)^m ds}{k^m}$, neglectis reliquis terminis qui

pro v^m poni deberent; quia in iis k plures quam m in denomitatore habet dimensiones. Ex his iam

sequitur fore $Q = \frac{\alpha^m}{k^m} \int (f^2 - s^2)^m ds$ integrali hoc ita accepto vt euanescat posito $s = f$. Erit ergo

$v = a(f^2 - s^2) + \frac{\xi}{k^m}(f^n - s^n) + \frac{\alpha^m}{k^m} \int (f^2 - s^2)^m ds$;

E e e 2

atque

atque hinc $\frac{1}{\sqrt{v}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha(f^2 - s^2)}} - \frac{\mathcal{E}(f^n - s^n) - \alpha^m \int (f^2 - s^2)^m ds}{2 \alpha^{\frac{3}{2}} k^m (\mathcal{F} - s s)^{\frac{3}{2}}}$

omittendis iterum terminis sequentibus ob memoratam rationem. Hinc nunc prodibit tempus $\int \frac{ds}{\sqrt{v}} = \int \frac{ds}{\sqrt{\alpha(f^2 - s^2)}}$

$$= \frac{\mathcal{E}}{2 \alpha^{\frac{3}{2}} k^m} \int \frac{ds(f^n - s^n)}{(\mathcal{F} - s s)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\alpha^m}{2 \alpha^{\frac{3}{2}} k^m} \int \frac{ds \int (f^2 - s^2)^m ds}{(\mathcal{F} - s s)^{\frac{3}{2}}},$$

quod ita integratum, ut evanescat posito $s=0$; dabit tempus, quo corpus descendens arcum MA $=s$ absoluit. Totum ergo descensus tempus per

arcum f obtinebitur, si post integrationem ponatur $s=f$; quod tempus debet esse constans seu ita comparatum, ut non pendeat ab f . Primus au-

tem temporis terminus $\int \frac{ds}{\sqrt{\alpha(f^2 - s^2)}}$ posito post integrationem $s=f$ iam dat huiusmodi expressionem, in qua non amplius inest f ; prodit enim $\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}$.

Quamobrem si duo reliqui termini ita essent comparati, ut postquam posuitur $s=f$ sese destruant; quaesito foret satisfactum; haberetur enim

pro integro descensus tempore haec expressio $\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}$;

quae est constans. Debet ergo esse $\mathcal{E} \int \frac{ds(f^n - s^n)}{(\mathcal{F} - s s)^{\frac{3}{2}}}$

$$= -\alpha^m \int \frac{ds \int (f^2 - s^2)^m ds}{(\mathcal{F} - s s)^{\frac{3}{2}}}, \text{ posito post integrationem } s=f.$$

Dat autem $\int \frac{ds(f^n - s^n)}{(\mathcal{F} - s s)^{\frac{3}{2}}}$ posito $s=f$,

multiplum potestatis ipsius f , cuius exponens est

$$n-2, \text{ atque alterum integrale } \int \frac{ds \int (f^2 - s^2)^m ds}{(\mathcal{F} - s s)^{\frac{3}{2}}}$$

posi-

posito $s=f$ dat multiplum potestatis ipsius f , cuius exponens est $2m-1$. Fiat igitur $n=2m+1$, atque & ita sumatur vt hae duae potestates ipsius f , quarum vtriusque exponens erit $2m-1$, sese destruant. Quo autem appareat quales coefficientes habiturae sint istae ipsius f potestates; ex casibus simplicioribus concludemus. Integratis igitur sequentibus formulis ita vt euanescant posito $s=0$,

tumque facto $s=f$ reperietur $\int \frac{(f-s)ds}{(ff-s s)^{\frac{3}{2}}} = f^{-1}$; at-

que $\int \frac{(f^3-s^3)ds}{(ff-s s)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{3}f^3$; et $\int \frac{(f^5-s^5)ds}{(ff-s s)^{\frac{3}{2}}} =$

$\frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3}f^5$; hincque erit generaliter $\int \frac{(f^{2m+1}-s^{2m+1})ds}{(ff-s s)^{\frac{3}{2}}} =$

$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)} f^{2m-1}$, vnde erit & $\int \frac{ds(f^n-s^n)}{(ff-s s)^{\frac{3}{2}}} =$

$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)} \& f^{2m-1}$. Alterius termini coefficientis

ex eadem analogia innotescet. Est enim integratione ita instituta, vt integrale euanescat posito

$s=0$; per seriem $\int (f^2-s^2)^m ds = -f^{2m}(f-s) +$

$\frac{m}{1 \cdot 3} f^{2m-2} (f^3-s^3) - \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 5} f^{2m-4} (f^5-s^5) +$

$\frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7} f^{2m-6} (f^7-s^7) - \text{etc.}$ Haec igitur se-

ries in $-\frac{\alpha^m ds}{(ff-s s)^{\frac{3}{2}}}$ ducta et integrata atque tum

posito $s=f$, dabit $\alpha^m f^{2m-1} (1 - \frac{2^m}{1 \cdot 3} + \frac{4m(m-1)}{1 \cdot 3 \cdot 5} -$

$\frac{8m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \text{etc.}) = \frac{\alpha^m f^{2m-1}}{2m+1}$. His igitur duo-

bus valoribus inter se aequatis prodit & $====$

Ecc 3

1.3.5.

$\frac{1.3.5.7 \dots (2m-1) a^m}{2.4.6.8 \dots 2m(2m+1)}$, quo valore loco $\frac{1}{a}$ substituto habebitur pro curua tautochrone ad descensus pertinente, posito $\frac{1}{a}$ loco a homogeneitatis ergo, sequens aequatio $gx = \frac{s^2}{a} + \frac{1.3.5 \dots (2m-1) s^{2m+1}}{2.4.6 \dots 2m(2m+1) a^m k^m}$. Vel si ex x deretur s hinc oritur ista aequatio $s = \sqrt{gax - \frac{1.3.5 \dots (2m-1) g^m a x^m}{2.4.6 \dots 2m(2m+1) 2 k^m}}$. Atque tempus vnus cuiusque descensus super hac curua erit $= \frac{\pi \sqrt{a}}{2}$, seu longitudo penduli in vacuo a grauitate naturali $= 1$, sollicitati, eodem tempore descensus absolutis erit $= \frac{a}{2}$. Eadem aequatio pro curua tautochrone mutatur in aequationem pro curua super qua omnes ascensus aequalibus temporibus, tempore scilicet $\frac{\pi \sqrt{a}}{2}$ absoluuntur, si loco k^m scribatur $-k^m$. Q. E. I.

Corollarium I.

739. Si $2m+1 > 2$ seu $m > \frac{1}{2}$, curuae radius osculi in puncto A idem erit, qui pro aequatione $gx = \frac{s^2}{a}$; scilicet $\frac{ga}{2}$. In his ergo casibus corpus minimum descensum absoluit eodem tempore quo in vacuo; seu descensus super infima curuae portiuncula infinite parua, idem erit in vacuo et in medio resistente si modo $m > \frac{1}{2}$.

Co.

Corollarium 2.

740. Si $m = \frac{1}{2}$ in vtroque termino s habe-
bit duas dimensiones. Quare radius osculi in A
non amplius erit $\frac{ga}{2}$ sed eo erit minor. In hoc
ergo medio, quod in ratione celeritatum resistit;
tempus descensus minimi per arcum circularem
maius erit quam in vacuo; hocque in data ratione.

Corollarium 3.

741. Si m fuerit $< \frac{1}{2}$; verum tamen > 0 ,
radius osculi in A erit infinite paruus; super hac
ergo curua in vacuo minimus descensus absolue-
retur tempore infinite paruo; cum in medio re-
sistente finito tempore perficiatur.

Scholion I.

742. Quod ad hunc casum $m < \frac{1}{2}$ attinet,
hoc quod diximus quidem ex aequatione sequi-
tur, quam in medio rarissimo quaesito plene sa-
tisfacere ponimus. In casu autem quo $m < \frac{1}{2}$, tres
termini, ex quibus aequatio consistit, etiamsi me-
dium fit rarissimum non satisfaciunt. Duo enim
termini quibus gx aequatur, considerari debent
tanquam duo termini initiales seriei conuergentis,
in qua sequentes prae primis euanescant. Tota
vero series huiusmodi habebit formam $gx = \frac{s^x}{a} +$

$$\frac{As^{2m+1}}{a^m k^m} + \frac{Bs^{4m}}{a^{2m+1} k^{2m}} + \frac{Cs^{6m-1}}{a^{3m-2} k^{3m}} + \text{etc. in}$$

qua

qua exponentes ipsius s in progressionē arithmetica progrediuntur; haecque forma partim ex analogia partim ea ipsa ratione, qua ad secundum terminum inueniendum vsi sumus, colligi potest. Ex hac iam forma apparet curuae in puncto infimo A conditionem, si $m < \frac{1}{2}$ ex duobus terminis primis cognosci non posse, quantumvis k sit magnum. Quia enim exponentes ipsius s decrescunt, in sequentibus terminis s tandem in denominatorem migrabit, ideoque posito $s = 0$ fiet $x = \infty$, ex quo apparet curuam his casibus in A , non terminari; neque radium osculi in hoc loco posse definiri. Quod incommodum non habet locum, si exponentes ipsius s crescunt.

Scholion 2.

743. Hinc igitur patet modus curuam tautochronam in medio in quacunque celeritatum ratione multiplicata resistente inueniendi; etiamsi medium non fuerit rarissimum. Cum enim aequatio pro tautochrona sit huius formae $gx = \frac{s^2}{a} + \frac{A s^{2m+1}}{a^m k^m} + \frac{B s^{4m}}{a^{2m-1} k^{2m}} + \frac{C s^{6m-1}}{a^{3m-2} k^{3m}} + \text{etc.}$ quemadmodum ex conditione tautochronismi valorem coefficientis A determinauimus; eodem modo etiam coefficientes reliquorum terminorum poterunt definiri. At propter tantopere compositas formulas integrales labor fere fit insuperabilis; qui autem forte subleuabitur, si quis tantum vnicum coef-

coefficientem B vel ad summum duos B et C determinandi operam adhibuerit, quoniam sequentes ex analogia concludi possent. Ad haec accedit, quod haec series in casu, quo $m=1$ cognita sit; quippe ex superioribus (724) habemus $g x = \frac{s^2}{a} + \frac{s^3}{6k} + \frac{s^4}{48ak^2} + \frac{s^5}{480ak^3} + \text{etc.}$ quae series ad generalem inveniendam non parum subsidii afferet. Terminus vero B inueniri debet ex

$$\begin{aligned} & \text{sequente aequatione } B \int \frac{(f^{4m} - s^{4m}) ds}{(ff - ss)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{4} A^2 \\ & \int \frac{(f^{2m+1} - s^{2m+1})^2 ds}{(ff - ss)^{\frac{5}{2}}} + \frac{3}{2} A \int \frac{ds(f^{2m+1} - s^{2m+1}) \int ds (ff - ss)^m}{(ff - ss)^{\frac{5}{2}}} \\ & + \frac{3}{4} \int \frac{ds(\int ds(f^2 - s^2)^m)^2}{(ff - ss)^{\frac{5}{2}}} - m A \int \frac{ds \int ds (ff - ss)^{m-1} (f^{2m+1} - s^{2m+1})}{(ff - ss)^{\frac{3}{2}}} \\ & - m \int \frac{ds \int ds (ff - ss)^{m-1} \int ds (ff - ss)^m}{(ff - ss)^{\frac{3}{2}}}, \text{ cuius aequa-} \end{aligned}$$

tionis integralia ita sunt sumenda vt euanescant posito $s=f$, quo facto poni debet $s=0$; atque tum valor ipsius B inuenietur. Coefficiens vero A iam cognitus est; inuenimus enim $A =$

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m(2m+1)}.$$

Pro casu quo $m=1$, superiorem aequationem euolui inuenique $B = \frac{1}{48}$; existente $A = \frac{1}{6}$, id quod egregie congruit. Si autem valores coefficientium in infinitum innotescerent, tum haberetur quidem aequatio serie

infinita constans pro tautochrone quiescita; quae autem si eius lex cognita fuerit, per methodum meam series summam, in aequationem terminorum numero finito constantem transformari poterit

terit. Atque hanc propemodum vnicam et tutissimam iudico methodum, cuius ope tautochronae in aliis resistentiae hypothesibus inueniri queant.

Corollarium 4.

744. Si igitur aequatio $gx = \frac{s^2}{a} + \frac{A s^{2m+1}}{a^m k^m} + \frac{B s^{4m}}{a^{2m-1} k^{2m}} + \text{etc.}$ exprimat tautochronam descensuum; ascensus tautochronos producet ista curva $gx = \frac{s^2}{a} - \frac{A s^{2m+1}}{a^m k^m} + \frac{B s^{4m}}{a^{2m-1} k^{2m}} - \frac{C s^{6m-1}}{a^{3m-2} k^{3m}} + \text{etc.}$ quae oritur ponendo k^m negatiuum.

Corollarium 5.

745. Perspicitur hinc quoties m fuerit numerus integer, toties tautochronam ascensibus inferientem ANC esse continuam tautochronae descensuum BMA. Eadem enim aequatio oritur siue k^m siue s ponatur negatiuum.

Corollarium 6.

746 Praeterea intelligitur curuam ANC, super qua omnes ascensus eodem tempore absoluntur, quo descensus super curva BMA, minus esse curuam quam BMA, et cuspidem C altius habere positam quemadmodum in medio quod in duplicata celeritatum ratione resistit.

Co-

Corollarium 7.

747. In medio quod in simplici ratione celeritatum resistit, omnes ipsius s exponentes fiunt $= 2$; ex quo sequitur tam tautochronam descensum quam ascensum esse semicycloides. Ea vero pro ascensu, quia s^2 minorem habet coefficientem, quam pro descensu maiore circulo erit genita; si quidem tempora ascensum aequalia esse debeant temporibus descensum. Interim vero eadem cyclois continua semiofcillationes quoque producit isochronas, ascensum vero tempora erunt minora quam tempora descensum.

Scholion 3.

748. Si m est numerus integer facile ex data forma potest ipsius A valor definiri. Namque si $m=1$ erit $A=\frac{1}{6}$; si $m=2$ erit $A=\frac{3}{40}$ et ita porro. At si m non est numerus integer difficilius est valorem A exhibere; series enim valorum ipsius A debet interpolari. Pro fractionibus quidem, quarum denominator est 2 valor ipsius A per quadraturam circuli potest definiri. Posito enim π pro perimetro circuli, cuius diameter est 1, erit vt sequitur:

$$\begin{array}{l} m \left| \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{5}{2}, \quad \frac{7}{2}, \quad \text{etc.} \right. \\ A \left| \frac{1}{\pi}, \quad \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \pi}, \quad \frac{2 \cdot 4 \cdot 1}{3 \cdot 5 \cdot 3 \pi}, \quad \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 1}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 4 \pi}, \quad \text{etc.} \right. \end{array}$$

Ex quo patet si fuerit $m = \frac{2n+1}{2}$ fore $A = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n \cdot 1}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)(n+1)\pi}$, atque adeo $g x^s = \frac{s^2}{a} +$
Fff 2 2.4.6

412 CAPUT TERTIUM DE MOTU PUNCTI

$2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n \cdot s^{2n+2}$
 $3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)(n+1)\pi a^m k^m$ existente scilicet m
 $= \frac{2n+1}{2}$. Quaecunque autem m fuerit fractio, erit

perpetuo $A = \frac{1}{(2m+1)^2} \int dz (1-z)^m$, hoc integrali
 ita accepto, ut evanescat posito $z=0$; atque tum
 posito $z=1$. Quemadmodum docui in Comment.
 A. 1730. in Diff. de progressionibus transcen-
 dentibus.

Corollarium 8.

749. Si nunc pro singulis mediis resistenti-
 bus rarissimis quaerantur tautochronae descensuum
 eae se habebunt ut sequitur:

$$\begin{array}{l|l} m=0 & gx = \frac{s^2}{a} + s \\ m=\frac{1}{2} & gx = \frac{s^2}{a} + \frac{s^2}{\pi \sqrt{ak}} \\ m=1 & gx = \frac{s^2}{a} + \frac{s^2}{6ak} \\ m=\frac{3}{2} & gx = \frac{s^2}{a} + \frac{s^4}{3\pi ak \sqrt{ak}} \\ m=2 & gx = \frac{s^2}{a} + \frac{3s^5}{40a^2 k^2} \\ m=\frac{5}{2} & gx = \frac{s^2}{a} + \frac{5\pi a^2 k^2 \sqrt{ak}}{8s^6} \\ m=3 & gx = \frac{s^2}{a} + \frac{5s^7}{112a^2 k^3} \end{array}$$

Ex his formabuntur tautochronae ascensuum; si
 ultimi termini fiant negativi.

Scholion 4.

750. Haec igitur sufficiant de tautochronis
 simplicibus, super quibus vel omnes descensus tan-
 tum

tum, vel omnes ascensus aequalibus absoluuntur temporibus. Praeter has autem curuas etiam aliae tautochronarum nomine appellari possunt, super quibus vel omnes semioscillationes, vel etiam solum omnes integrae oscillationes sint isochronae; quarum curuarum numerus vti etiam in vacuo est infinitus. Quod autem ad integras oscillationes attinet, haec quaestio resistentiae propria est, in vacuo enim omnes semioscillationes inter se sunt aequales. Quia autem in his quaestionibus duae curvae inueniendae proponuntur, quarum altera ad ascensus altera ad descensus pertineat; antequam huiusmodi quaestiones pro tautochronismo soluamus, alias faciliores propositiones circa binas curuas ascensum et descensum spectantes praemitemus.

PROPOSITIO 83.

Problema.

751. *In hypothesi potentiae uniformis deorsum tendentis et medio uniformi, quod resistit in duplicata ratione celeritatum, data curua MA inuenire alteram AN illi in A iungendam huius indolis; vt corpus per arcum quemcunque MA super curua data descendens super curua quaesita ascensu conficiat arcum AN, qui aequalis sit arcui MA.*

Tab. XV.
Fig. 6.

Solutio.

Positis potentia sollicitante g ; exponente resistentiae k , et celeritate in A, quam ex descen-

Fff 3

su

414 CAPVT TERTIVM DE MOTV PVNCTI

ſu acquiſiuit, quaque ſuper curua quaefita AN aſcenſum inchoat, debita altitudini b ; ſit pro curua data abſciſſa $AP = x$; arcus $AM = s$; pro quaefita vero ſit abſciſſa $AQ = t$ atque arcus $AN = r$. His poſitis erit altitudo celeritati corporis deſcendentis in M debita $= e^{\frac{s}{k}} (b - g \int e^{-\frac{s}{k}} dx)$ et altitudo celeritati corporis aſcendentis in N debita $= e^{-\frac{r}{k}} (b - g \int e^{\frac{r}{k}} dt)$. Integer ergo arcus deſcenſus provenit ex hac aequatione $b = g \int e^{\frac{s}{k}} dx$; integer vero arcus aſcenſus ex hac aequatione $b = g \int e^{\frac{r}{k}} dt$. Inter arcus igitur deſcenſus et aſcenſus haec habebitur aequatio: $\int e^{-\frac{s}{k}} dx = \int e^{\frac{r}{k}} dt$ ſeu huius differentialis $e^{-\frac{s}{k}} dx = e^{\frac{r}{k}} dt$. Quare cum arcus aſcenſus aequalis eſſe debeat arcui deſcenſus ponatur $r = s$; quo facto prodibit iſta aequatio $e^{-\frac{2s}{k}} dx = dt$. Cum autem curua MA data ſit, dabitur aequatio inter s et x ; ex qua, ſi loco dx eius valor per s et ds ſubſtituatur, prodibit aequatio inter t et s ſeu inter t et r propter $r = s$; quae determinabit naturam curvae quaefitae AN. Q. E. I.

Corollarium I.

752. Si curvae datae MA portio infima exprimatur aequatione $x = \alpha s^n$; erit pro portione infima

infima curvae AN haec aequatio $dt = \alpha n e^{\frac{-2s}{s} n - 1} ds$. Est vero propter s arcum minimum $e^{\frac{-2s}{k}} = 1 - \frac{2s}{k}$, vnde erit $t = \alpha s^n - \frac{2 \alpha n s^{n+1}}{(n+1)k}$ seu tantum $t = \alpha s^n$. Portiones ergo infimae vtriusque curvae erunt inter se similes.

Corollarium 2.

753. Ex aequatione $e^{\frac{-2s}{k}} dx = dt$ intelligitur esse semper $dt < dx$ seu $t < x$. Punctum ergo N semper humilius erit positum, quam punctum respondens M. Ex quo sequitur curuam AN minus esse curuam versus AB, quam curuam AM.

Corollarium 3.

754. Hanc ob rem curua ANC non poterit esse similis et aequalis curvae AM; quia hoc casu puncta M et N arcus aequales AM et AN terminantia forent in eadem altitudine sita.

Corollarium 4.

755. Si corpus super curua MA ex altitudine infinita descenderet, quia in A celeritatem tantum finitam acquirit ad altitudinem tantum finitam ascendere poterit. Hoc ergo casu, quo curua AM in infinitum porrigitur, curua ANC non ultra datam altitudinem ascendere poterit, sed
asym-

afymtoton habebit horizontalem B C. Id quod etiam ex hoc apparet, si fit $s = \infty$; tum enim prodit $dt = 0$.

Scholion I.

756. Quemadmodum ex hac propositione intelligitur, quomodo ex data curua descensuum MA inueniri debeat curua ascensuum AN; ita vicissim hinc facile erit ex data curua AN alteram definire. Si enim detur aequatio inter t et s , erit $dx = e^{\frac{2s}{k}} dt$, aequatio pro curua AM.

Corollarium 5.

757. Quia curuae descensuum MA respondet curua ascensuum AN, cuius haec est aequatio $dt = e^{\frac{-2s}{k}} dx$. Ita si haec curua AN pro curua descensuum accipiatur, erit respondentis curuae ascensuum abscissa $= \int e^{\frac{-2s}{k}} dt = \int e^{\frac{-4s}{k}} dx$.

Corollarium 6.

758. Si hoc modo vltiores curuae respondentes quaerantur, obtinebitur sequens aequationum series.

Abscissa curuae respondens arcui s.

$$I = x$$

$$II = \int e^{\frac{-2s}{k}} dx$$

$$III = \int e^{\frac{-4s}{k}} dx$$

$$\begin{aligned} \text{IV} &= \int e^{\frac{-6s}{k}} dx \\ &\vdots \\ n &= \int e^{\frac{-2(n-1)s}{k}} dx. \end{aligned}$$

Corollarium 7.

759. Huius igitur seriei duae curvae contiguae hanc habebunt proprietatem, vt, iis in infimo puncto A coniunctis, corpus super priori descendens, super altera per arcum ascendat aequalem arcui descensus. Infinitesima autem huius seriei curua facto $n = \infty$, fit recta horizontalis, quia euanescit $e^{\frac{-\infty s}{k}}$; ideoque ipsa curuae abscissa.

Exemplum I.

760. Sit linea data recta verticalis, erit $x = s$. Tab. XVI.
Fig. I.
Pro curua ergo ascensuum quaesita ANE existente $AQ = t$ et $AN = s$ habebitur ista aequatio $dt = e^{\frac{-2s}{k}} ds$ seu $t = \frac{k}{2} (1 - e^{\frac{-2s}{k}})$. Atque eliminata quantitate exponentiali erit $2t ds = k ds - k dt$ siue $\frac{(\frac{1}{2}k - t) ds}{dt} = \frac{1}{2}k$. Ex qua aequatione perspicitur

curuam ANE esse tractoriam super asymtoto horizontali BD filo longitudinis $\frac{1}{2}k$ genitam. Quare altitudo asymtoti AB erit $= \frac{1}{2}k$. Si nunc haec ipsa tractoria ANE pro curua descensuum accipitur, ei respondebit curua quaesita, cuius ab-

sciffa arcui s respondens erit $= \int e^{\frac{-4s}{k}} ds$; quae ergo curua iterum erit tractoria asynton horizontalis habens, cuius asyntonos supra A eleuata est interuallo $\frac{1}{4}k$, cui longitudo fili aequatur. Seriei vero superioris omnes curuae erunt tractoriae, quae filis generantur, quorum longitudines constituunt hanc seriem $\frac{k}{0}, \frac{k}{2}, \frac{k}{4}, \frac{k}{6}$ etc. Recta scilicet verticalis tanquam tractoria considerari potest, cuius filum generans est $\frac{k}{0}$ seu infinitum. Vltima autem huius seriei tractoria in rectam abit horizontalem per A ductam.

Exemplum 2.

761. Si linea descensuum data fuerit recta utcumque ad horizontem inclinata MA , ita vt sit $MA(s):AP(x) = \alpha:1$, seu $dx = \frac{ds}{\alpha}$; habebitur pro curua quaesita AN ista aequatio $\alpha dt = e^{\frac{-2s}{k}} ds$, cuius integralis est $\alpha t = \frac{k}{2} (1 - e^{\frac{-2s}{k}})$. Ex quibus aequationibus coniunctis oritur $2\alpha t ds = kds - \alpha k dt$ seu $\frac{(\frac{k}{2\alpha} - t) ds}{dt} = \frac{k}{2}$. Quae aequatio quoque est pro tra-

ctoria filo longitudinis $\frac{k}{2}$ super asynton horizontali BD genita; existente $AB = \frac{k}{2\alpha}$; haecque tractoria per A transire debet. Seriei sequentes curuae omnes sunt quoque tractoriae, vt in praecedente exemplo, quarum fila generantia sunt $\frac{k}{0}, \frac{k}{2}, \frac{k}{4}, \frac{k}{6}$, etc. earum vero asyntonorm a puncto A

SUPER DATA LINEA IN MEDIO RES. 419

A distantiae tenent hanc progressionem $\frac{k}{0\alpha}, \frac{k}{2\alpha}, \frac{k}{4\alpha}, \frac{k}{6\alpha}$ etc. Hae scilicet omnes tractoriae cum axe verticali AB angulum constituent aequalem angulo PAM.

Corollarium 8.

762. Tractoriarum harum ea, quae primam seu rectam MA praecedit, hanc ergo habebit proprietatem, ut corpus super ea descendens, posteaque super recta AM ascendens aequalia spatia percurrat.

Corollarium 9.

763. Ad curuam igitur descensuum CA inueniendam, cui respondeat recta inclinata AM; super asymtoto horizontali filo longitudinis $\frac{k}{2}$ describatur tractoria CA, in eaque sumatur applicata $Ab = \frac{k}{2\alpha}$ et ex A constituatur recta inclinata AM; eritque CA curua descensuum, cui respondet recta AM pro ascensibus.

Tab. XVI.
Fig. 2.

Scholion 2.

764. Inferuire potest hic casus instar exempli problematis inuersi, quo ex data curua ascensuum, curua descensuum requiritur.

Ggg 2

Exem-

Exemplum 3.

Tab. XV.
Fig. 6.

765. Sit curua descensuum data cyclois MA, cuius natura hac aequatione fit expressa $2ax=s^2$, seu circuli genitoris diameter $=\frac{a}{2}$. Erit ergo $dx = \frac{sds}{a}$, vnde pro curua altera ascensuum AN haec inuenitur aequatio $adt = e^{-\frac{2s}{k}} sds$, cuius integralis est, $at = \frac{k^2}{4} (1 - e^{-\frac{2s}{k}}) - \frac{k}{2} e^{-\frac{2s}{k}} s$, quae propter $e^{-\frac{2s}{k}} = \frac{adt}{sds}$, abit in hanc $atsds = -\frac{ak^2dt}{4} + \frac{k^2sds}{4} - \frac{aksdt}{2}$. Haec curua in A, vt iam est dictum, tangentem habebit horizontalem. Habebit vero etiam asytmoton BC horizontalem; cuius altitudo BA reperietur si s fiat $=\infty$. Fiet autem hoc casu $e^{-\frac{2s}{k}} = 0$; quare erit $t = AB = \frac{k^2}{4a}$. Ex hoc intelligitur curuam alicubi punctum flexus contrarii habere debere; quod inuenietur si posito dt constante, ponatur $dds=0$. Hinc vero prodibit $1 = \frac{2s}{k}$ seu $s = \frac{k}{2}$. Quare si sumatur arcus AN $= \frac{k}{2}$ erit N punctum flexus contrarii; cui respondet abscissa AQ $= \frac{k^2}{4} - \frac{k^2}{2e}$ seu BQ $= \frac{k^2}{2e}$. Quo circa erit semper AB:BQ $= e:2=2,71828:2$.

Scholion 3.

766. Problema hoc propositum extat ab anonymo in Act. Lips. A. 1728. eiusque solutionem dedit in Comment. Acad. Petrop. A. 1729. Cl. D. Bernoulli, alia vsus methodo. Praeter hanc

hanc vero conditionem anonymus ille potissimum requirit vnam curuam continuam, cuius alter ramus descensibus alter ascensibus inferuiat, cuiusmodi curuae dantur innumerabiles, quas in sequente propositione detegemus.

PROPOSITIO 84.

Problema.

767. *Iisdem positis vt ante, inuenire curuam continuam MAN huiusmodi, vt in quauis semioscillatione, quae semper in arcu MA incipiat, super ea facta arcus descensus MA aequalis sit arcui ascensus sequentis AN.* Tab. XV.
Fig. 6.

Solutio.

Propositio haec a praecedente in hoc tantum differt, quod ibi data fuerit curua MA; hic vero ea quoque quaeri debeat ex hac conditione, quod vtraque curua MA et AN vnam eandemque curuam continuam constituere debeant. Sumtis igitur arcubus AM et AN aequalibus $=s$, et posita $AP=x$ atque $AQ=t$, erit $dt=e^{\frac{-2s}{k}}$ dx . Quia autem curua MAN debet esse continua, aequationem inter s et x ita oportet esse comparatam, vt si in ea loco s ponatur minus $-s$, quo casu arcus AM in arcum AN abit, valor ipsius x fiat $=t$ seu $=\int e^{\frac{-2s}{k}} dx$. Pono igitur

Ggg 3 tur

422 CAPUT TERTIVM DE MOTU PUNCTI

tur $dx = Mds$, vbi M fit functio quaedam ipsius s ; eaque abeat in N , si loco s ponatur $-s$. Ponatur ergo $-s$ loco s quo casu x abit in t , eritque $dt = -Nds$. Est vero quoque $dt = e^{\frac{-2s}{k}} dx = e^{\frac{-2s}{k}} Mds$, quocirca erit $N = -e^{\frac{-2s}{k}} M$. Sit porro $M = e^{\frac{+s}{k}} P$, abeatque P in Q posito $-s$ loco s eritque $N = e^{\frac{-s}{k}} Q$. Quibus valoribus loco M et N substitutis prodibit $Q = -P$. Ex quo apparet P huiusmodi esse debere functionem ipsius s , quae abeat in $-P$ posito $-s$ loco s , quas functiones impares appellare consueui. Sit itaque P functio quaecunque impar ipsius s , cuiusmodi sunt e.gr. as, as^3, as^5 etc. eritque $M = e^{\frac{s}{k}} Pds$ seu $x = \int e^{\frac{s}{k}} Pds$. Quae est aequatio pro curua quaesita. Q.E.I.

Corollarium I.

768. Quia est $dx = e^{\frac{s}{k}} Pds$ erit sumendis logarithmis $l dx = \frac{s}{k} + lP + lds$. Differentietur haec aequatio denuo posito ds constante, prodibitque $\frac{ddx}{dx} = \frac{ds}{k} + \frac{dP}{P}$ seu $kP ddx = Pdx ds + k dx dP$. Quae aequatio ab exponentialibus est libera.

Corollarium 2.

769. Quoniam P per s dari debet aequatio inuenta non habet variables inter se permixtas; quamobrem ea sufficit ad curuas in ea contentas construendas.

Exem. —

Exemplum.

770. Ponamus esse $P = \frac{s}{a}$, erit $ax = \int e^{\frac{s}{k}} ds$
 $= ke^{\frac{s}{k}} - k^2 e^{\frac{s}{k}} + k^2$, quae est aequatio pro vna
 et fortasse simplicissima curua satisfaciente. Haec
 vero aequatio eliminato exponentiali $e^{\frac{s}{k}}$ abit in
 hanc $axs ds = aks dx - k^2 a dx + k^2 s ds$. Vel ex-
 posito $e^{\frac{s}{k}}$ per seriem prodibit ista aequatio $ax =$
 $\frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{1.3k} + \frac{s^4}{1.2.4k^2} + \frac{s^5}{1.3.4.5k^3} + \text{etc.}$ Haec ergo
 curua in A habet tangentem horizontalem, eius-
 que radius osculi in hoc loco est a . Quia ne cur-
 ua fiat imaginaria esse debet $dx < ds$ debebit esse
 $e^{\frac{s}{k}} < a$. Quo ergo loco fit $e^{\frac{s}{k}}$, quae expres-
 sio crescente s quoque crescit, aequalis a , ibi
 curua AM habebit tangentem verticalem atque
 punctum reuersionis. Pro ramo AN posito $-s$
 loco $+s$ haec habetur aequatio $ax = \int e^{-\frac{s}{k}} s ds$,
 seu $dx = \frac{e^{-\frac{s}{k}} s ds}{a}$. Quare quamdiu fuerit $e^{-\frac{s}{k}} < a$,
 curua non fit imaginaria. At si vsquam si $e^{-\frac{s}{k}}$
 $s = a$, ibi curua quoque habebit punctum reuer-
 sionis et diametrum verticalem. Fieri autem pot-
 est si a satis magnum accipiatur, vt $e^{-\frac{s}{k}}$ semper
 minus sit quam a , quo casu curua AN in infi-
 nitum abibit, asymptotonque habebit horizonta-
 lem

lem BC. Fit autem $e^{\frac{-s}{k}} s = 0$ casibus, $s = 0$ et $s = \infty$, habebit ergo valorem maximum, si eius differentiale $= 0$, hoc vero casu fit $k = s$, et $e^{\frac{-s}{k}} s = k$. Quare si fuerit $a > \frac{k}{e}$ curua habebit asymptoton BC, cuius altitudo BA erit $= \frac{k^2}{a}$. At si fuerit $a < \frac{k}{e}$ curua AN, vti alter ramus, habebit quoque punctum reuerfionis, quod ex hac aequatione determinabitur, $a = e^{\frac{-s}{k}} s$. In priori casu curua AN habere debet punctum flexus contrarii, quod reperietur ex hac aequatione $1 = \frac{s}{k}$; erit scilicet in N sumto arcu $AN = k$.

PROPOSITIO 85.

Problema.

Tab. XV.
Fig. 6.

771. In hypotbesi grauitatis et resistentiae praecedenti si data fuerit curua MA, super qua descensus absoluantur; inuenire pro ascensibus curuam AN huius proprietatis, vt ascensus cuiusque tempus aequale sit tempori descensus praecedentis.

Solutio.

Positis vt ante potentia sollicitante $= g$; et medii exponente $= k$; sit pro curua MA abscissa $AP = x$; arcus $AM = s$; atque pro curua quaesita AN, abscissa $AQ = t$; arcus $AN = r$. Ponatur altitudo celeritati descensu quodam in A acquisito debita $= b$, qua celeritate sequentem ascensum in curua AN absoluet. His positis erit alti-

altitudo celeritati in M debita $= e^{\frac{s}{k}}(b - g \int e^{-\frac{s}{k}} dx)$
 et altitudo in ascensu celeritati in N debita $= e^{\frac{r}{k}}$
 $(b - g \int e^{\frac{r}{k}} dt)$. Tempus ergo descensus per arcum
 MA erit $= \int \frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}} \sqrt{(b - g \int e^{-\frac{s}{k}} dx)}}$, et tempus ascensus

per arcum AN $= \int \frac{e^{\frac{r}{2k}} dr}{\sqrt{(b - g \int e^{\frac{r}{k}} dt)}}$, quae duo

tempora, si post integrationem ponatur $g \int e^{-\frac{s}{k}} dx$
 $= b$, atque $g \int e^{\frac{r}{k}} dt = b$ debent esse aequalia. Po-
 natur ad hoc obtinendum $g \int e^{-\frac{s}{k}} dx = X$; $g \int e^{\frac{r}{k}} dt$
 $= T$: atque $\frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}} = dS$ et $e^{\frac{r}{2k}} dr = dR$, vbi X,

T, S et R sint tales functiones, quae evanescant
 posito x, s, t et $r = 0$. Efficiendum ergo est,
 vt haec duo integralia $\int \frac{dS}{\sqrt{(b-X)}}$ et $\int \frac{dR}{\sqrt{(b-T)}}$ fiant in-
 ter se aequalia, si post integrationem ponatur
 $X = b$ et $T = b$. At S et R vti et X et T sunt
 quantitates a b prorsus non pendentes, atque
 eandem inter se relationem tenere debent, quem-
 cunque valorem b habuerit. Quaesito ergo satis-
 fiet, si R fuerit talis functio ipsius T, qualis S est
 ipsius X. Vel sumpto $R = S$ esse quoque debet

$T = X$. Est vero $S = 2k(1 - e^{-\frac{s}{2k}})$ et $R = 2k(e^{\frac{r}{2k}} - 1)$

426 CAPUT TERTIUM DE MOTU PUNCTI

— 1); facto igitur $R = S$ erit $z = e^{\frac{r}{2k}} + e^{\frac{-s}{2k}}$, atque $r = 2kl(2 - e^{\frac{-s}{2k}})$. Quia autem hoc posito esse debet $X = T$ seu $e^{\frac{-s}{k}} dx = e^{\frac{r}{k}} dt$ fiet $t = \int e^{\frac{-s-r}{k}} dx$. Cum vero sit $e^{\frac{r}{k}} = (2 - e^{\frac{-s}{2k}})^2 = 4 - 4e^{\frac{-s}{2k}} + e^{\frac{-s}{k}}$, erit $t = \int \frac{dx}{e^{\frac{s}{k}}(2 - e^{\frac{-s}{2k}})^2} = \int \frac{dx}{(2e^{\frac{s}{2k}} - 1)^2}$. Ex quibus ergo constructio curvae

innotescit, quia sumto arcu $AN = r = 2kl(2 - e^{\frac{-s}{2k}})$ huic respondet abscissa $AQ = t = \int \frac{dx}{(2e^{\frac{s}{2k}} - 1)^2}$;

Aequatio vero pro curua AN commodius inuenietur ex data aequatione inter s et x . Nam quia est $s = -2kl(2 - e^{\frac{r}{2k}})$ et $x = \int \frac{dt}{(2e^{\frac{s}{2k}} - 1)^2}$; si

loco s et x hi valores substituantur, prodibit aequatio inter t et r pro curua quaesita AN. Q. E. I.

Corollarium I.

772. Quia est $r = 2kl(2 - e^{\frac{-s}{2k}})$ erit $dr = \frac{-s}{e^{\frac{s}{2k}}} ds$. Cum vero ne curua AN fiat imaginaria esse debeat $dr > dt$; curua AN eousque erit

erit realis, quousque $ds > \frac{dx}{e^{\frac{s}{2k}}(2 - e^{\frac{s}{2k}})}$, seu $ds >$

$$\frac{dx}{2e^{\frac{s}{2k}} - 1}.$$

Corollarium 2.

773. Est vero $e^{\frac{s}{2k}}$ semper maius unitate; ex quo sequitur ubi fuerit $ds > dx$ eo magis fore $ds >$

$$\frac{dx}{2e^{\frac{s}{2k}} - 1}. \text{ Quare si curua data fuerit realis, quae-}$$

fit quoque semper erit realis.

Corollarium 3.

774. Cum sit $s = -2kl(2 - e^{\frac{r}{2k}})$ erit $ds =$
 $\frac{e^{\frac{r}{2k}} dr}{(2 - e^{\frac{r}{2k}})} = \frac{dr}{(2e^{\frac{r}{2k}} - 1)},$ vnde facilius relatio in-
 ter ds et dx in computum duci potest.

Corollarium 4.

775. Ex solutione problematis simul appa-
 ret, quomodo eius inuersum sit soluendum. Si
 enim curua ascensuum AN datur, seu aequatio
 inter t et r , ex ea aequatio inter x et s for-

mabitur ope aequationum $t = \int \frac{dx}{(2e^{\frac{s}{2k}} - 1)^2}$ et $r =$
 $2kl(2 - e^{\frac{s}{2k}}).$

Corollarium 5.

776. Ad curvae formam circa punctum A indagandam ponantur s et r valde exigua, eritque $e^{\frac{-s}{2k}} = 1$, unde fiet $dr = ds$ atque $dt = dx$. Ex quo perspicitur curvarum MA et NA infimas portiones esse inter se similes et aequales.

Exemplum I.

Tab. XVI.
Fig. 1.

777. Sit linea descensuum data recta MA, vtcunque inclinata, vt sit $s = \alpha x$ seu $ds = \alpha dx$.

Cum nunc sit $ds = \frac{dr}{\frac{-r}{2e^{\frac{-r}{2k}} - 1}}$ et $dx = \frac{dt}{(\frac{-r}{2e^{\frac{-r}{2k}} - 1})^2}$

habebitur inter t et r pro curua quaesita ista aequatio, $dr = \frac{\alpha dt}{\frac{-r}{2e^{\frac{-r}{2k}} - 1}}$ seu $\alpha dt = 2e^{\frac{-r}{2k}} dr - dr$ cu-

ius integralis est $\alpha t = 4k(1 - e^{\frac{-r}{2k}}) - r$. Quae aequatio in seriem conuersa dat $\alpha t = r - \frac{r^2}{1.2.k} + \frac{r^3}{1.2.3.2k^2} - \frac{r^4}{1.2.3.4.4k^3} + \text{etc.}$ ideoque in puncto infimo A est $dr = \alpha dt$. Curua haec alicubi habebit tangentem horizontalem, qui locus inuenietur ponendo dt

$= 0$ tum vero erit $2 = e^{\frac{-r}{2k}}$ seu $r = 2kl2$, cui respondet $\alpha t = 2k - 2kl2$. Atque si r fiat maius quam $2kl2$ valor ipsius dt fiet negatiuus, ideoque curua iterum descendet, donec $-dt$ fiat $= dr$,

hoc autem accidit, si est $1 - \alpha = 2e^{\frac{-r}{2k}}$ seu $r = 2k \frac{2}{1 - \alpha}$

$l \frac{2}{1-\alpha}$. At quia α non potest esse minus quam 1; si est $\alpha=1$ tangens verticalis in infinitum ab A distabit; atque si $\alpha > 1$ ultra tangentem horizontalem nusquam habebit tangentem verticalem. Sed antrorsum ultra tangentem habebit verticalem, vbi est $r = -2kl \frac{1+\alpha}{2}$. Casu ergo quo linea data est verticalis, seu $\alpha=1$ fit $r=0$, seu tangens in A erit verticalis.

Corollarium 6.

778. Si s denotet totum arcum descensus, r Tab. XV. exprimet totum arcum sequenti ascensu super curua AN descriptum. Quare si detur arcus descensus s reperietur arcus ascensus $r = 2kl(2 - e^{\frac{s}{2k}})$. Quoniam enim posuimus $T=X$ integros arcus descensus et ascensus litterae s et r denotant. Fig. 6.

Exemplum 2.

779. Sit curua data MA ipsa tautochrone descensuum, quam ante pro eadem resistentiae hypothese inuenimus; habebit curua AN hanc proprietatem, vt omnes ascensus aequalibus quoque absoluantur temporibus; iisdem nempe quibus descensus super MA. Quare curua AN erit ipsa tautochrone ascensuum cum curua MA continua iam ante inuenta. Quo hoc autem ex isto calculo ostendatur, sumamus aequationem pro curua tautochrone descensuum, quae est vel $adx=k$

Hhh 3

$(e^{\frac{s}{2k}})$

$(e^{\frac{s}{2k}} - 1) ds$ vel $ax = 2k^2(e^{\frac{s}{2k}} - 1) - ks$. Cum nunc

fit $ds = \frac{dr}{\frac{-r}{2e^{\frac{s}{2k}} - 1}}$ et $e^{\frac{s}{2k}} = \frac{e^{\frac{-r}{2k}}}{\frac{-r}{2e^{\frac{s}{2k}} - 1}}$ atque $dx =$

$\frac{dt}{\frac{-r}{(2e^{\frac{s}{2k}} - 1)^2}}$, his substitutis erit $\frac{a dt}{\frac{-r}{(2e^{\frac{s}{2k}} - 1)^2}} =$

$\frac{k dr (1 - e^{\frac{-r}{2k}})}{\frac{-r}{(2e^{\frac{s}{2k}} - 1)^2}}$ seu $adt = k(1 - e^{\frac{-r}{2k}}) dr$. Quae ae-

quatio ex illa formatur, si pro x ponatur t atque $-r$ pro s . Quare haec curua AN est continua cum MA atque tautochrone ascensuum.

Corollarium 7.

780. Dato ergo arcu descensus s super tautochrone descensuum; erit arcus ascensus sequentis super tautochrone ascensuum $r = 2kl(2 - e^{\frac{-s}{2k}})$. Atque si descensus a cuspide tautochronae descensuum incipiat, cuius locum dat $e^{\frac{s}{2k}} = \frac{a+k}{k}$ (729.) erit arcus ascensus $r = 2kl \frac{2a+k}{a+k}$, vt supra inuenimus (732).

Scholion.

781. Cum itaque tautochrone in hac resistantiae hypothesi quaesito satisfaciat atque sit curua continua; hinc ansam arripimus inuestigandi plures

plures curuas continuas, quarum duo rami vices curuarum MA et AN sustinere queant; id quod in sequente propositione praestabimus.

PROPOSITIO 86.

Problema.

782. *Iisdem positis ut ante inuenire casus, quibus duae curuae MA et AN, super quibus descensus et sequentes ascensus aequalibus temporibus absoluantur, vnam curuam continuam constituunt.*

Tab. XV
Fig. 6.

Solutio.

Manentibus iisdem denominationibus, quibus in praecedente propositione vsi sumus, scilicet $AP = x$; $AM = s$, $AQ = t$ et $AN = r$; praeter duas aequationes ibi inuentas $z = e^{\frac{r}{2k}} + e^{\frac{-s}{2k}}$ et $e^{\frac{-s}{k}} dx = e^{\frac{r}{k}} dt$ effici debet, ut aequationes inter s et x et inter r et t sub eadem aequatione comprehendantur. Sumamus ad hoc nouam variabilem z , ex qua punctum M in curua AM determinetur, ita ut si z fiat negatiuum, eodem modo obtineatur punctum N in altera curua. Hanc ob rem s huiusmodi esse oportet functionem ipsius z , ut eadem, si loco z ponatur $-z$, det arcum AN, qui ob positionem negatiuam est $-r$, ita ut s abeat in $-r$ posito $-z$ loco z . Ponatur $e^{\frac{-s}{2k}} = 1 - Q$, erit $e^{\frac{r}{2k}} = 1 - Q$ propter $z = e^{\frac{r}{2k}} + e^{\frac{-s}{2k}}$ ideo-

ideoque Q erit functio impar ipsius z , quae in sui negativam abit facto z negatiuo. Erit itaque $e^{\frac{-s}{k}} = (1+Q)^2$ et $e^{\frac{r}{k}} = (1-Q)^2$. Porro autem esse debet $dx(1+Q)^2 = dt(1-Q)^2$, atque x talis esse debet functio ipsius z , quae abit in t posito z negatiuo. Ponatur $dx = Mdz$, abeatque M in N facto z negatiuo, erit ergo $dt = -Ndz$. Quamobrem fiet $M(1+Q)^2 = -N(1-Q)^2$. Sit ergo $M = P(1-Q)^2$ existente P quoque = functioni impari ipsius z ; atque tum fiet $N = -P(1+Q)^2$; ideoque aequalia inter se erunt $M(1+Q)^2$ et $-N(1-Q)^2$ vti requiritur. Sumtis ergo pro lubitu loco P et Q functionibus imparibus ipsius z , erit $dx = Pd z(1-Q)^2$ seu $x = \int Pd z(1-Q)^2$ atque $s = 2kl \frac{1}{1+Q}$. Vnde innumerabiles oriuntur curvae MA , quarum partes continuae AN ascensus producunt isochronos respectiue descensibus super MA factis. Quia autem duae functiones occurrunt P et Q , determinetur altera, vt fit $Q = -z$ erit $s = 2kl \frac{1}{1-z}$ atque $x = \int Pd z(1+z)^2$. In quarum posteriore aequatione valor ipsius z ex priore, qui est $= 1 - e^{\frac{-s}{2k}}$ substituatur, habebiturque aequatio inter x et s pro curua quaesita. Q. E. I.

Corollarium I.

783. Si $z = 0$, fit quoque $s = 0$. Quare integrale ipsius $Pd z(1+z)^2$ ita accipi debet vt euanescat posito $z = 0$. Nam euanescente arcu s abscissa quoque x euanescere debet.

Co-

Corollarium 2.

784. Cum fit $s = 2kl \frac{1}{1-z}$ erit $ds = \frac{2k dz}{1-z}$, et quia est $dx = P dz (1+z)^2$, erit $\frac{ds}{dx} = \frac{2k}{P(1-z^2)(1+z)}$, nisi ergo $P(1-z)^2(1+z)$ maius fuerit quam $2k$ curua erit realis.

Corollarium 3.

785. In puncto infimo A, quia euanescit z , erit $\frac{ds}{dz} = \frac{2k}{P}$. Quare P talis esse debet functio impar ipsius z , vt ea, si $z=0$, minor sit quam $2k$: hoc autem euenire non potest, nisi P talis fuerit functio ipsius z , quae euanescat posito $z=0$, hocque casu tangens in A erit horizontalis.

Exemplum I.

786. Quia P debet esse functio impar ipsius z , ponatur $P = \frac{az}{(1-z^2)^2}$. Quo posito erit $x = \int \frac{az dz}{(1-z^2)^2}$ seu $dx = \frac{az dz}{(1-z^2)^2}$. Est vero $z = 1 - e^{\frac{-s}{2k}}$ et $dz = \frac{1}{2k} e^{\frac{-s}{2k}} ds$, atque $1-z = e^{\frac{-s}{2k}}$. Quibus substitutis habebitur $dx = \frac{ae^{\frac{-s}{2k}} ds (1 - e^{\frac{-s}{2k}})}{2ke^{\frac{-s}{k}}} = \frac{ads}{2k} (e^{\frac{-s}{2k}} - 1)$.

Quae est aequatio pro curua tautochrone supra inuenta, super cuius parte MA omnes descensus aequalibus absoluuntur temporibus; super parte autem altera AN omnes ascensus iisdem temporibus.

Exemplum 2.

787. Sit $P = \frac{6az - 2az^3}{(1-zz)^2}$; erit $x = \int \frac{6azdz - 2az^3dz}{(1-zz)^2}$
 $= \frac{3az^2 + az^4}{1-zz}$. Cum autem sit $z = 1 - e^{\frac{-s}{2k}}$ et $1 - z$
 $= e^{\frac{-s}{2k}}$; erit $x = \frac{a(1 - e^{\frac{-s}{2k}})^2 (4 - e^{\frac{-s}{2k}})}{e^{\frac{-s}{2k}}} = a(1 - e^{\frac{-s}{2k}})^3$
 $(4 - e^{\frac{-s}{2k}} - 1) = a(4 - e^{\frac{-s}{2k}} - (3 - e^{\frac{-s}{2k}})^2)$. Quae aequa-
tio in seriem conuersa dat $\frac{4k^2x}{3a} = ss + \frac{s^3}{6k} - \frac{s^5}{43k^3}$
 $+ \frac{s^7}{96k^5} - \frac{s^9}{3456k^7} + \text{etc.} = b$ x mutata constante a
in $\frac{4k^2}{3b}$.

PROPOSITIO 87.

Problema.

Tab. XVI.
Fig. 3.

788. In hypotbesi gravitatis uniformis deorsum tendentis et medio uniformi in duplicata celeritatum ratione resistente, si detur curua quaecunque MA, super qua corpus descensus absoluat, inuenire curuam AN ei iungendam ad ascensus idoneam, ita vt omnes semioscillationes, quae super curua MAN fiunt, aequalibus absoluantur temporibus.

Solutio.

Positis vt hactenus potentia sollicitante, g , et exponente resistentiae k ; sit curuae datae MA abscissa AP $= x$; arcus AM $= s$; curuae vero quaesitae abscissa AQ $= t$; arcus AN $= r$. Incipiat nunc descensus in quocunque curuae MA puncto, fit-
que

que celeritas in A acquisita debita altitudini b , qua celeritate sequentem ascensum in curua AN absoluet. His positis erit altitudo celeritati corporis descendentis in M debita $= e^{\frac{s}{k}}(b - gse^{\frac{-s}{k}}dx)$, et altitudo celeritati corporis ascendentis in N

debita $a = e^{\frac{-r}{k}}(b - gse^{\frac{r}{k}}dt)$. Ex his erit tempus, quo in hac semioscillatione arcus MA et AN per-

curruntur $= \int \frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}} \sqrt{(b - gse^{\frac{-s}{k}}dx)}} + \int \frac{dr}{e^{\frac{-r}{2k}} \sqrt{(b - gse^{\frac{r}{k}}dt)}}$,

quae expressio integrum dabit semioscillationis tempus, si post integrationem ponatur $gse^{\frac{-s}{k}}dx = b$,

atque $gse^{\frac{r}{k}}dt = b$. Cum igitur hoc tempus debeat semper habere valorem constantem, qui non a quantitate litterae b pendeat, ex hac conditione determinari debet aequatio inter t et r ope datae aequationis inter x et s . Ponamus breui-

tatis gratia $gse^{\frac{-s}{k}}dx = X$ et $gse^{\frac{r}{k}}dt = T$, atque

$\frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}} = ds$ et $\frac{dr}{e^{\frac{-r}{2k}}} = dR$. Quibus substitutis habere

debet $\int \frac{ds}{\sqrt{(b-X)}} + \int \frac{dR}{\sqrt{(b-T)}}$ valorem constantem si post integrationem ponatur $X = b$, et $T = b$.

Fiat ergo generaliter $T = X$, quia T ab X non pendet, habebimus pro tempore hanc expressionem:

$\int \frac{ds + dR}{\sqrt{(b-X)}}$, quae ita debet esse comparata, vt post integrationem facto $X = b$ littera b prorsus ex

cálculo euanescat. Hoc autem fiet, si fuerit $dS + dR = \frac{\alpha dx}{\sqrt{x}}$, erit enim tempus semioscillationis $= \int \frac{\alpha dx}{\sqrt{(b\bar{x} - x\bar{x})}} = \pi\alpha$ denotante π peripheriam circuli, cuius diameter $= 1$. Sit $\alpha = \frac{\sqrt{2f}}{\sqrt{g}}$, denotabit f longitudinem penduli in vacuo et gravitate $= g$ semioscillationes minimas eodem tempore absoluentis, quo haec semioscillationes super curvis MA et AN peraguntur (167). Cum igitur sit $dS + dR = \frac{dx\sqrt{2f}}{\sqrt{x}}$ erit $S + R = 2\sqrt{2f}X = 2\sqrt{2f}\int e^{\frac{-s}{k}}dx$. Est vero $S = 2k(1 - e^{\frac{-s}{2k}})$ et $R = 2k(e^{\frac{r}{2k}} - 1)$, unde erit $k e^{\frac{r}{2k}} - k e^{\frac{-s}{2k}} = \sqrt{2f}\int e^{\frac{-s}{k}}dx$, seu $e^{\frac{r}{2k}} = e^{\frac{-s}{2k}} + \frac{1}{k}\sqrt{2f}\int e^{\frac{-s}{k}}dx$, ideoque fiet $r = 2kl(e^{\frac{-s}{2k}} + \frac{1}{k}\sqrt{2f}\int e^{\frac{-s}{k}}dx)$. Huic vero valori ipsius r respondens valor ipsius t ex hac aequatione determinabitur $T = X$ seu $e^{\frac{r}{k}} dt = e^{\frac{-s}{k}}dx$. Ex quo inuenitur $t = \int \frac{dx}{(1 + \frac{1}{k}e^{\frac{-s}{2k}}\sqrt{2f}\int e^{\frac{-s}{k}}dx)^2}$ ex quibus constructio curvae innotescit. Aequatio autem pro curua quaesita AN commodius ex data aequatione inter x et s obtinebitur, si loco s substituatur $-2k(l(e^{\frac{r}{2k}} - \frac{1}{k}\sqrt{2f}\int e^{\frac{-s}{k}}dt))$ et loco x hic valor $\int \frac{dt}{(1 - \frac{1}{k}e^{\frac{-r}{2k}}\sqrt{2f}\int e^{\frac{r}{k}}dt)^2}$. His enim substitutis oriatur haec aequatio inter r et t , quae est pro curua quaesita AN. Q. E. I.

Co-

Corollarium 1.

789. Cum oscillationes minimae congruant cum oscillationibus in vacuo, si curvae MA tangens in A non fuerit horizontalis, vel si radius osculi in A fuerit infinite parvus, curvae quaesitae AN radius osculi in A erit $4f$. Erit enim hoc casu tempus descensus minimi $= 0$ et tempus ascensus $= \frac{\pi\sqrt{2f}}{\sqrt{g}}$.

Corollarium 2.

790. Sin autem curvae MA in A radius osculi fuerit finitae magnitudinis scilicet b , erit tempus descensus minimi $= \frac{\pi\sqrt{2b}}{2\sqrt{g}}$ (166). Quo igitur tempus semioscillationis sit $= \frac{\pi\sqrt{2f}}{\sqrt{g}}$ erit radius osculi curvae AN in A $= (2\sqrt{f} - \sqrt{b})^2$; debet autem esse $b < 4f$, seu $f > \frac{1}{4}b$, ne curua AN fiat imaginaria.

Corollarium 3.

791. Curvae ergo MA et AN in A et tangentem horizontalem, et radium osculi communem habebunt, si fuerit $f = b$. Hoc enim casu curvae AN radius osculi in A fiet quoque $= b$.

Scholion I.

792. Quemadmodum hic ex data curua descensuum curua ascensuum determinauimus; ita perspicitur simili modo ex curua ascensuum data curuam descensuum inueniri posse; si enim detur aequa-

tio inter t et r ; quia est $s = -2kl(e^{\frac{r}{2k}} - \frac{1}{k} \sqrt{2f} e^{\frac{r}{k}} dt)$
 atque $x = \int \frac{dt}{(1 - \frac{1}{k} e^{\frac{r}{k}} \sqrt{2f} e^{\frac{r}{k}} dt)^2}$; his valoribus substituendis aequatio pro curua descensuum inter s et x obtinebitur.

Corollarium 4.

793. Cum f innumerabiles habere possit valores, modo sit $f > \frac{1}{4}b$; ad quamvis curuam siue descensuum siue ascensuum datam innumerae adiungi possunt curuae, eiusmodi, vt semioscillationes super iis factae sint omnes isochronae, omnino vti in vacuo fieri potest.

Corollarium 5.

794. Quia in solutione posuimus $T=X$ hac aequatione relatio continetur, inter quemque arcum descensus integrum et arcum respondentis ascensus. Ita si arcus descensus fuerit s erit arcus ascensus $r = 2kl(e^{\frac{-s}{2k}} + \frac{1}{k} \sqrt{2f} e^{\frac{-s}{k}} dx)$.

Exemplum I.

795. Sit linea descensuum data recta verticalis PA pro qua est $s=x$. Erit ergo quoque $ds=dx$, atque $\int e^{\frac{-s}{k}} dx = k(1 - e^{\frac{-s}{k}})$. Vnde igitur fiet $r = 2kl(e^{\frac{-s}{2k}} + \sqrt{\frac{2f}{k}}(1 - e^{\frac{-s}{k}}))$ seu $e^{\frac{r}{2k}} = e^{\frac{-s}{2k}} + \sqrt{\frac{2f}{k}}(1 - e^{\frac{-s}{k}})$

Porro

Porro autem est $t = \int \frac{ds}{(1 + e^{\frac{s}{2k}} \sqrt{\frac{2f}{k}(1 - e^{\frac{-s}{k}})})^2}$, seu

$e^{\frac{r+s}{k}} dt = ds$. Eliminato ergo s prodibit pro cur-
ua ascensuum ista aequatio: $(2f+k)^2 dt = k(2f-k)dr -$
 $\frac{2kf(2f+k)dr + 4fk^2 e^{\frac{r}{k}} dr}{e^{\frac{r}{2k}} \sqrt{(4ff + 2fk - 2fke^{\frac{r}{k}})}}$; in qua variabi-

les sunt a se inuicem separatae, quare ea ad cur-
uam construendam sufficit. Integratio vero hu-
ius aequationis a quadratura circuli pendet. Pro
vacuo ex hac aequatione elicitur faciendo $k = \infty$
ista aequatio $dt + dr = \frac{dr\sqrt{2f}}{\sqrt{(2f-r)}}$ seu $t = 4f - r - 2\sqrt{2f(2f-r)}$, quae aequatio ad eam quam in cap.
praec. inuenimus reduci potest.

Exemplum 2.

796. Sit linea descensuum data ipsa tauto-
chrona descensuum supra inuenta, cuius aequatio
est $adx = kds(e^{\frac{s}{2k}} - 1)$. Erit ergo $\int e^{\frac{-s}{k}} dx = \frac{k}{a} \int ds$
 $(e^{\frac{-s}{2k}} - e^{\frac{-s}{k}}) = \frac{2k^2}{a} (\frac{1}{2} - e^{\frac{-s}{2k}} + \frac{1}{2} e^{\frac{-s}{k}}) = \frac{k^2}{a} (1 - e^{\frac{-s}{2k}})^2$ et \int
 $e^{\frac{-s}{k}} dx = \frac{k(1 - e^{\frac{-s}{2k}})}{\sqrt{a}}$. Quamobrem fiet $e^{\frac{r}{2k}} = e^{\frac{-s}{2k}} +$
 $\frac{\sqrt{2f - e^{\frac{-s}{2k}} \sqrt{2f}}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{2f - e^{\frac{-s}{2k}} (\sqrt{a} - \sqrt{2f})}}{\sqrt{a}}$ atque $e^{\frac{-s}{2k}} =$

$$e^{\frac{r}{2k}}$$

$$\frac{e^{\frac{r}{2k}} \sqrt{a - \sqrt{2f}}}{\sqrt{a - \sqrt{2f}}} \text{ et } ds = \frac{e^{\frac{r}{2k}} dr \sqrt{a}}{\sqrt{2f - e^{\frac{r}{2k}} \sqrt{a}}} \text{ atque } a dx =$$

$$\frac{a k e^{\frac{r}{2k}} dr (e^{\frac{r}{2k}} - 1)}{(e^{\frac{r}{2k}} \sqrt{a - \sqrt{2f}})^2}. \text{ Cum autem porro sit } e^{\frac{-s}{k}} dx$$

$$= e^{\frac{r}{k}} dt, \text{ erit } a e^{\frac{r}{k}} dt = \frac{a k e^{\frac{r}{2k}} dr (e^{\frac{r}{2k}} - 1)}{(-\sqrt{a} + \sqrt{2f})^2} \text{ siue } a dt =$$

$$\frac{a k dr (1 - e^{\frac{-r}{2k}})}{(-\sqrt{a} + \sqrt{2f})^2} \text{ seu } (-\sqrt{a} + \sqrt{2f})^2 dt = k dr (1 - e^{\frac{-r}{2k}})$$

vbi $\sqrt{2f}$ maius esse debet quam \sqrt{a} . Haec autem aequatio inuenta comprehendit omnes tautochronas ascensuum; quae enim harumcunque cum tautochrona descensuum iungatur, super curua ex iis composita omnes semioscillationes debent esse isochronae. Si sumatur $f = 2a$, aequatio erit haec $a dt = k dr (1 - e^{\frac{-r}{2k}})$, quae est pro tautochrona ascensuum, super qua omnes ascensus eodem tempore absoluuntur, quò descensus super tautochrona descensuum data, atque ea est continuatio tautochronae descensuum.

Exemplum 3.

797. Sit linea descensuum data MA tautochrona ascensuum, et quaeratur quales curuae cum ea iunctae semioscillationes isochronas producant. Aequatio vero pro hac curua MA est $adx = kds$
(1 - e

$(1 - e^{\frac{-s}{2k}})$. Erit ergo $\int e^{\frac{-s}{k}} dx = \frac{k}{a} \int ds (e^{\frac{-s}{k}} - e^{\frac{-3s}{2k}}) = \frac{k^2}{a}$
 $(\frac{1}{3} - e^{\frac{-s}{k}} + \frac{2}{3} e^{\frac{-3s}{2k}}) = \frac{k^2}{3a} (1 - 3e^{\frac{-s}{k}} + 2e^{\frac{-3s}{2k}}) = \frac{k^2}{3a}$
 $(1 + 2e^{\frac{-s}{2k}}) (1 - e^{\frac{-s}{2k}})^2$. Ex his oritur $e^{\frac{r}{2k}} = e^{\frac{-s}{2k}}$
 $+ (1 - e^{\frac{-s}{2k}}) \sqrt{\frac{2f}{3a} (1 + 2e^{\frac{-s}{2k}})}$ atque $t = \frac{k}{a}$
 $\int \frac{ds (1 - e^{\frac{-s}{2k}})}{(1 + (e^{\frac{-s}{2k}} - 1) \sqrt{\frac{2f}{3a} (1 + 2e^{\frac{-s}{2k}})})^2}$, ex quibus constru-
 ctio curvae consequitur.

Scholion 2.

798. Hoc exemplum ideo attulimus, ut ap-
 pareat, cum quam curua tautochronam ascen-
 suum coniunctam esse oporteat, quo semioscilla-
 tiones omnes aequalibus temporibus absoluantur.
 Ex formulis autem inuentis apparet curuam quae-
 sitam non esse tautochronam descensuum; aequa-
 tio enim $c dt = k dr (e^{\frac{r}{2k}} - 1)$ in illis formulis non
 continetur, quod periculum facienti statim pate-
 bit. Quamobrem si MA fuerit tautochrona de-
 scensuum et AN ascensuum, etiam si omnes itus
 per MAN iisdem absoluantur temporibus, tamen
 reditus seu semioscillationes sequentes per NAM
 non erunt isochronae. Pendulum ergo, quod se-
 cundum curuas MA et AN oscillari efficitur, oscil-
 lationes non faciet isochronas etiam si alternae se-
 mioscillationes, in quibus descensus in curua MA
 incipit, aequalibus peragantur temporibus. Haec
 Tom. II. Kkk con-

consequenter curua composita MAN non est idonea ad pendulorum motum in medio resistente aequabilem efficiendum. Optimum vero huic incommodo remedium afferretur, si casus determinaretur, quo curua AN similis et aequalis curuae MA prodiret.

PROPOSITIO 88.

Problema.

Tab. XVI.
Fig. 3.

799. Si curuae MA et AN eam habuerint proprietatem, ut omnes semioscillationes, quae in curua MA incipiunt, sint inter se isochronae in medio quod in duplicata ratione celeritatum resistit; determinare casus, quibus hae duae curuae coniunctae MA et AN unam curuam continuam constituunt.

Solutio.

Manentibus iisdem denominationibus, quas in praecedente Prop. adhibuimus; scilicet $AP = x$; $AM = s$; $AQ = t$; et $AN = s$, atque $f =$ longitudini penduli isochroni in vacuo et grauitate $= g$: inuenimus ibi has duas aequationes $ke^{\frac{r}{2k}} - ke^{\frac{-s}{2k}} = \sqrt{2ffe^{\frac{-s}{k}}dx}$ et $e^{\frac{r}{k}}dt = e^{\frac{-s}{k}}dx$, quibus relatio inter utramque curuam continetur. Iam quia curuae MA et NA duo debent esse rami curuae continuae, aequatio inter x et s ita debet esse comparata, ut si x abeat in t , tum s fiat $= -r$ propter situm negatiuum. Ad hoc accipiamus nouam variabilem z , cuius s et x sint tales functiones, ut
facto

facto z negatiuo x abeat in t et s in $-r$. Sit $\int e^{\frac{-s}{k}} dx = z^2$; erit $ke^{\frac{r}{2k}} - ke^{\frac{-s}{2k}} = z\sqrt{2f}$; facto enim z negatiuo, quo casu r in $-s$ et $-s$ in r transit, prodibit $ke^{\frac{-s}{2k}} - ke^{\frac{r}{2k}} = -z\sqrt{2f}$; quae aequatio cum priore congruit. Sit P functio quaecunque par ipsius z , quae non mutatur etiam si loco z ponatur $-z$; et ponatur $ke^{\frac{-s}{2k}} = -\frac{1}{2}z\sqrt{2f} + P$; quo posito quaesito satisfiet. Namque faciamus z negatiuum; abibit $-s$ in r ; atque habebitur $ke^{\frac{r}{2k}} = \frac{1}{2}z\sqrt{2f} + P$; ac $ke^{\frac{r}{2k}} - ke^{\frac{-s}{2k}} = z\sqrt{2f}$; vti requiritur. Alteri aequationi $\int e^{\frac{r}{k}} dt = \int e^{\frac{-s}{k}} dx$ per hanc $\int e^{\frac{-s}{k}} dx = z^2$ iam satisfiet; posito enim z negatiuo et dt loco dx atque r loco $-s$ prodit $\int e^{\frac{r}{k}} dt = z^2 = \int e^{\frac{-s}{k}} dx$. Ex variabili ergo z , cuius P est functio quaecunque par; curua quaesita AM , cuius continua est altera AN ita determinatur, vt sit $e^{\frac{-s}{2k}} = -\frac{z\sqrt{2f}}{2k} + \frac{P}{k}$, atque $dx = 2e^{\frac{s}{k}} z dz = \frac{8k^2 z dz}{(2P - z\sqrt{2f})^2}$. Erit ergo $x = 8k^2 \int \frac{z dz}{(2P - z\sqrt{2f})^2}$ et $s = 2kl \frac{2k}{2P - z\sqrt{2f}}$. Sit $z = \frac{u\sqrt{2}}{\sqrt{f}}$ tum ad formulas simpliciores efficiendas tum ad homogeneitatem commodius producendam, quia debet esse u vnus dimensionis, erit ergo P functio par ipsius u vnus dimensionis quoque. Quare habebitur $s = 2kl \frac{k}{P - u}$ atque $x = \frac{4k^2}{f} \int \frac{u du}{(P - u)^2}$. Q. E. I.

Corollarium I.

800. Infinitae ergo curvae tautochronae MAN inuenientur; si infiniti varii valores loco P, qui omnes sint functiones pares ipsius u substituuntur. Aequatio vero inter x et s obtinebitur, si ex duabus aequationibus inuentis $s = 2k \sqrt{\frac{k}{P-u}}$ atque $x = \frac{4k^2}{-J} \int \frac{u du}{(P-u)^2}$, variabilis u quae etiam in P inest, eliminetur.

Corollarium 2.

801. Quia est $s = 2k \sqrt{\frac{k}{P-u}}$ erit $ds = \frac{2k(du-dP)}{P-u}$ et $e^{\frac{s}{2k}} = \frac{k}{P-u}$ seu $P-u = ke^{\frac{s}{2k}}$. Atque $e^{\frac{s}{2k}} ds = \frac{2k^2(du-dP)}{(P-u)^2}$. Cum qua aequatione si altera $dx = \frac{4k^2 u du}{J(P-u)^2}$ coniungatur, prodibit $\frac{e^{\frac{s}{2k}} ds}{dx} = \frac{f(du-dP)}{2u du}$. Quae aequatio ad eliminandum u est saepe commodissima.

Scholion I.

802. Quia euanescente s quoque x euanescere debet; primum inuestigandum est, quo ipsi u dato valore s euanescat. Deinde integrale $\int \frac{u du}{(P-u)^2}$ ita accipi debet, vt euanescat, si loco u idem valor substituatur. Hocque obseruandum est, cum in constructione curvae, quae ope duarum inuentarum aequationum perfici potest, tum in concinnatione aequationis inter x et s ; si quidem ea

ex

ex aequatione integrata $x = \frac{4k^2}{f} \int \frac{udu}{(P-u)^2}$ deducatur. Ceterum si loco u et P quaelibet eorum multiplica adhibeantur, loco duarum inuentarum aequationum adhiberi possunt istae $s = 2k / \frac{c}{P-u}$ et $x = \frac{4k^2}{f} \int \frac{udu}{(P-u)^2}$ vbi constans c est arbitraria, et idcirco ita determinari potest, vt s eodem casu euanescat, quo euanescit x . At s euanescit si $u = 0$; quia est $\int e^{\frac{-s}{k}} dx = \frac{2u^2}{f}$; atque $\int e^{\frac{-s}{k}} dx$ euanescit euanescente s ; quare c aequale esse debet valori ipsius P si in eo ponatur $u = 0$. Eodem ergo casu x debet euanescere, ex quo constans in integratione valoris ipsius x determinatur. Vel etiam loco P talis functio par ipsius u accipi debet, quae fiat $= c$ si ponatur $u = 0$.

Corollarium 3.

803. Cum longitudo penduli isochroni in vacuo et grauitate $= g$ sit $= f$; atque oscillationes minimae in medio resistente non discrepent ab oscillationibus in vacuo: erit radius osculi curuae in $A = f$; si quidem tangens curuae in A fuerit horizontalis.

Exemplum I.

804. Quia P esse debet functio par ipsius u , sit P constans $= c = k$; quo posito $u = 0$ fiat $s = 0$. Erit ergo $k - u = k e^{\frac{-s}{2k}}$ seu $u = k(1 - e^{\frac{-s}{2k}})$. Atque ob $dP = 0$, habebitur $\frac{e^{\frac{-s}{2k}} ds}{dx} = \frac{f}{2u}$ seu $u = \frac{f e^{\frac{-s}{2k}} dx}{2 ds}$.

Ex quibus aequationibus conficitur ista $\int \frac{dx}{2} = kds$
 $(e^{\frac{s}{2k}} - 1)$. Quae aequatio est pro ipsa tautochro-
na descensuum; quae ultra A continuata dat tau-
tochronam ascensuum; atque omnes semiofcillatio-
nes super hac curua continua, si modo in ramo
MA incipiant, erunt isochronae.

Exemplum 2.

805. Sit $P = k + \frac{u^2}{a}$; retinebit P eundem va-
lorem facto u negativo. Hoc posito erit $k - u$

$$+ \frac{u^2}{a} = ke^{\frac{s}{2k}}; \text{ et propter } dP = \frac{2u du}{a} \text{ erit } \frac{e^{\frac{s}{2k}} ds}{dx} \\ = \frac{f(a-2u)}{2au}; \text{ ex qua aequatione prodit } u = \\ \frac{\int f dx}{\frac{s}{2(ae^{\frac{s}{2k}} ds + f dx)}}. \text{ Qui ipsius } u \text{ valor in altera ae-}$$

$$\text{quatione substitutus dat } 2fa^2 e^{\frac{s}{k}} dx ds = 4k(e^{\frac{s}{2k}} - 1) \\ (ae^{\frac{s}{2k}} ds + f dx)^2 - f^2 ae^{\frac{s}{2k}} dx^2; \text{ atque extracta radice} \\ \frac{ae^{\frac{s}{2k}} ds}{f dx} = \frac{ae^{\frac{s}{2k}}}{4k(e^{\frac{s}{2k}} - 1)} - 1 + \sqrt{\frac{ae^{\frac{s}{2k}}}{4k(e^{\frac{s}{2k}} - 1)}} \left(\frac{ae^{\frac{s}{2k}}}{4k(e^{\frac{s}{2k}} - 1)} - 1 \right)$$

In casu speciali si fuerit $a = 4k$ ista aequatio abit
in hanc $\frac{4ke^{\frac{s}{2k}} ds}{f dx} = \frac{1 + e^{\frac{s}{4k}}}{e^{\frac{s}{2k}} - 1}$, quae duas aequatio-

nes in se complectitur, quarum altera est $f dx =$
 $4ke^{\frac{s}{2k}} ds (e^{\frac{s}{4k}} - 1)$, et altera $-f dx = 4ke^{\frac{s}{2k}} ds (e^{\frac{s}{4k}}$
 $+ 1)$

+1). Harum autem posterior, quia posito $s=0$, non evanescit dx , et ob valorem ipsius dx negativum, est inutilis. Prior vero integrata dat $fx=16k^2$
 $\left(\frac{e^{\frac{3s}{4k}}}{3} - \frac{e^{\frac{s}{2k}}}{2} + \frac{1}{6}\right)$ seu $3fx=8k^2(2e^{\frac{3s}{4k}} - 3e^{\frac{s}{2k}} + 1)$

Quae ultra A continuata hac aequatione exprimitur $3ft=8k^2(2e^{\frac{-3r}{4k}} - 3e^{\frac{-r}{2k}} + 1)$. Per seriem vero habetur ista aequatio: $fx=\frac{s^2}{2} + \frac{5s^3}{24k} + \frac{19s^4}{384k^2} + \text{etc.}$ et pro altera curvae parte AN haec: $ft=\frac{r^2}{2} - \frac{5r^3}{24k} + \frac{19r^4}{384k^2} - \text{etc.}$

Corollarium 4.

806. Quia est $z^2=\frac{2u^2}{f}=se^{\frac{-s}{k}}dx$, erit $u=\sqrt{\frac{1}{2}}f\int e^{\frac{-s}{k}}dx$. Eliminato vero u est $P=ke^{\frac{-s}{2k}} + \sqrt{\frac{1}{2}}f\int e^{\frac{-s}{k}}dx$. Quare si ille valor ipsius u in hac aequatione substituatur, prodibit statim aequatio inter s et x .

Exemplum 3.

807. Ponamus esse $P=\sqrt{k^2+u^2}$, seu $P^2=k^2+u$; substitutis loco P et u^2 valoribus supra datis, $k^2e^{\frac{-s}{k}} + ke^{\frac{-s}{2k}}\sqrt{2f\int e^{\frac{-s}{k}}dx}=k^2$, seu $\sqrt{2f\int e^{\frac{-s}{k}}dx}=k(e^{\frac{s}{2k}} - e^{\frac{-s}{2k}})$. Hinc quadratis sumendis oritur $2f\int e^{\frac{-s}{k}}dx=k^2(e^{\frac{s}{2k}} - e^{\frac{-s}{2k}})^2=k^2(e^{\frac{s}{k}} + e^{\frac{-s}{k}} - 2)$.

Haec vero aequatio differentiativa dat hanc $2fe^{\frac{-s}{k}}dx=kds$
 (e

$(e^{\frac{s}{k}} - e^{-\frac{s}{k}})$ seu $2fdx = kds(e^{\frac{2s}{k}} - 1)$, cuius integralis est $2fx = \frac{k^2 e^{\frac{2s}{k}}}{2} - ks - \frac{k^2}{2}$. Quae aequatio in seriem conuersa dat $fx = \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3k} + \frac{s^4}{6k^2} + \frac{s^5}{15k^3} + \frac{s^6}{45k^4} + \text{etc.}$

Scholion 2.

808. Quas in his exemplis inuenimus curuas tautochronas pro medio quod resistit in duplicata ratione celeritatum, eae ita sunt comparatae, vt arcus MA et AN sint diffimiles. Cum igitur omnes descensus super curua MA incipere debeant, sequentes semiofcillationes, quae in curua NA incipiunt, non erunt tautochronae, id quod in causa est, quod hae curuae ad motum oscillatorium accommodari nequeant. Huic autem in commo- do remedium afferretur, si huiusmodi curuarum MA et NA par inueniretur, quae essent inter se similes et aequales, hoc enim casu perinde super vtraque curua descensus fieri posset. Dubium quoque nullum est, quin talis casus existat; eiusque inuentio, quia hae duae curuae forte non erunt continuae, ad praecedentem propositionem potius pertinet. Indagari scilicet debet curua descensuum, cui respondens curua ascensuum similis et aequalis sit; haec vero inuestigatio ob defectum analyseos ita est difficilis, vt dubitem, num quisquam ante insignem analyseos promotionem, ad hunc scopum pertingere possit. Haec vero quae-
stio

stio huc reducitur, ut inuestigetur aequatio inter s et x huius conditionis, ut si in ea ponatur $2kl(e^{\frac{s}{2k}} - \frac{1}{k} \sqrt{2} \int e^{\frac{s}{k}} dx)$ loco s ; et $\int \frac{dx}{(1 - \frac{1}{k} \sqrt{2} \int e^{\frac{s}{k}} dx)^2}$ loco x , eadem prodeat aequatio, quae habebatur ante. Condicio quidem haec multis modis facilius effici potest; attamen quomodo ei satisfieri possit non video. Si medium fuerit rarissimum, non difficile est ex allatis casum inuenire, quo duae curuae MA et AN sint inter se similes et aequales. Ego quidem ad finem perducto calculo hanc inueni aequationem $f dx = s ds + \frac{s^3 ds}{9k^2}$, seu $f x = \frac{s^2}{2} + \frac{s^4}{36k^2}$; quae curua simul ultra A continuata ramum habet AO similem et aequalem arcui AM; quare pendulum in hac curua oscillans singulas semioscillationes absoluet aequalibus temporibus. Erit autem $s^2 = -9k^2 + 3k \sqrt{9k^2 + 4fx}$ et $s = \sqrt{-9k^2 + 3k \sqrt{9k^2 + 4fx}}$. Quia vero k est quantitas valde magna, erit $s = \sqrt{2fx - \frac{fx \sqrt{2fx}}{18k^2}}$, atque $ds = \frac{f dx}{\sqrt{2fx}} - \frac{fx \sqrt{2fx}}{12k^2}$. Hincque fit $dy = dx \sqrt{\frac{f-2x}{2x} - \frac{f^2 dx}{12k^2} \sqrt{\frac{2x}{f-2x}}}$. Ponatur $f = 2a$ erit $y = \int dx \sqrt{\frac{a-x}{x} - \frac{a^2 dx}{3k^2} \sqrt{\frac{x}{a-x}}} = \int \frac{a dx - x dx}{\sqrt{(ax - xx)}} - \int \frac{a^2 x dx}{3k^2 \sqrt{(ax - xx)}}$
 $= (1 + \frac{a^2}{3k^2}) \sqrt{(ax - xx)} + (1 - \frac{a^2}{3k^2}) \int \frac{\frac{1}{2} a dx}{\sqrt{(ax - xx)}}$.
 Quae ergo curua eodem fere modo, quo cyclois describi potest ope rectificationis circuli.

Corollarium 5.

809. Si sumatur $a = k\sqrt{3}$ seu $f = 2k\sqrt{3}$; curua haec abit in ellipfin, cuius axis horizontalis est duplo maior quam verticalis, qui est $= k\sqrt{3}$. Fieri ergo potest, vt ellipsis fit tautochrone in fluido rarissimo; atque magis satisfaciat quam cyclois.

Scholion 3.

Tab. XVI.
Fig. 4.

810. Constructio autem curuae tautochronae in medio rarissimo in praec. scholio datae est vt sequitur. Super recta verticali $AB = a = \frac{1}{2}f$ describatur semicirculus AOB , et ex hoc super basi BD cyclois AFD ; quae eadem inuerso situ describatur AGD . Quibus factis curua quaesita AMC construetur sumendis vbique eius applicatis $PM = PF - \frac{a^2}{3k^2}PG$; qua ratione curuae infinita puncta cognoscuntur. Vel etiam accipi potest $PM = (1 + \frac{a^2}{3k^2})PO + (1 - \frac{a^2}{3k^2})AO$, ita vt cycloide non sit opus. Curua autem haec alicubi habebit tangentem verticalem, seu applicatam PM maximam quae inuenitur posito $dy = 0$. Prodibit autem $\frac{a-x}{\infty} = \frac{a^2}{3k^2}$ seu $x = \frac{3ak^2}{a^2 + 3k^2}$ cui valori si AP aequalis capiatur, inuenietur applicata maxima.

PROPOSITIO 89.

Problema.

Tab. XVI.
Fig. 5.

811. In hypotesi grauitatis uniformis deorsum tendentis g , data curua quacunque am pro descensibus

bus in vacuo; inuenire curuam AM pro descensibus in medio resistente vniiformi in duplicata ratione celeritatum huius indolis, vt omnes descensus super MA sint isochroni respectiue omnibus descensibus super ma; si celeritates in punctis imis a et A fuerint aequales.

Solutio.

Sit pro curua descensuum in vacuo am abscissa $ap=t$; arcus $am=r$; pro curua vero descensuum in medio resistente sit AP= x et AM= s ; resistentiae vero exponens ponatur= k . Iam considerentur bini descensus super his curuis, in quibus celeritates in A et a acquisitae sint aequales et debitae altitudini b . Erit ergo tempus descensus in vacuo $=\int \frac{dr}{\sqrt{(b-gt)}}$, si post integrationem ponatur $gt=b$. At pro tempore descensus in medio resistente super curua MA habebitur

$\int \frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}} \sqrt{(b-g\int e^{\frac{s}{2k}} dx)}}$ si item post integrationem po-

natur $g\int e^{\frac{s}{2k}} dx=b$. Quamobrem haec tempora erunt aequalia si fuerit $\frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}} = dr$ et $\int e^{\frac{s}{2k}} dx=t$;

his enim positis pro vtroque tempore habebitur eadem expressio $\int \frac{dr}{\sqrt{(b-gt)}}$. Cum igitur sit $\frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}} =$

dr , erit integrando $2k(1-e^{\frac{s}{2k}}) = r$ atque $e^{\frac{s}{2k}} =$

452. CAPUT TERTIVM DE MOTU PUNCTI

$\frac{2k-r}{2k}$; vnde prodit $s = 2kl \frac{2k}{2k-r}$. Altera vero aequatio $\int e^{\frac{-s}{k}} dx = t$ dat $e^{\frac{-s}{k}} dx = dt$. Est autem $e^{\frac{-s}{k}} = \frac{(2k-r)^2}{4k^2}$ quo valore substituto habetur $dx = \frac{4k^2 dt}{(2k-r)^2}$ ex quo oritur $x = \int \frac{4k^2 dt}{(2k-r)^2}$. Data ergo aequatione inter t et r pro curua am ope duarum harum aequationum, quibus s et x per t et r determinantur, construi poterit curua quaesita AM . Aequatio vero inter x et s commodius inuenietur ex data aequatione inter t et r ; si in ea loco r substituatur $2k(1 - e^{\frac{-s}{k}})$ et $\int e^{\frac{-s}{k}} dx$ loco t . Q. E. R.

Corollarium I.

§12. Circa punctum infimum A ubi t et r sunt quantitates evanescentes fit $s = r + \frac{r^2}{4k}$; et $x = t + \int \frac{rdt}{k}$, seu $dx = dt + \frac{rds}{k}$ et $ds = dr + \frac{rdr}{2k}$. Quare inclinatio curvae MA ad axem in A aequalis erit inclinationi curvae ma in A .

Corollarium 2.

§13. Porro radius osculi in puncto infimo a si tangens fuerit horizontalis est $= \frac{rdr}{dt}$; et in A quia tangens quoque erit horizontalis $= \frac{sds}{dx} = \frac{rdr + \frac{3r^2dr}{4k}}{dt + \frac{rdt}{k}}$. Erit ergo $\frac{sds}{dx} = \frac{rdr}{dt} - \frac{r^2dr}{4kdt} - \frac{rdr}{dt} (1 - \frac{r}{4k})$. Quare ob r infinite paruum erit $\frac{sds}{dx} = \frac{rdr}{dt}$.

Corollarium 3.

§14. Si ergo curua ma in a habuerit tangentem horizontalem; erit curvae MA tangens in A

A quoque horizontalis; atque radius osculi in A aequalis erit radio osculi in a.

Corollarium 4.

815. Si igitur in vacuo inuenta fuerit curua ma ; in qua tempora descensuum quameunque habeant relationem ad celeritates in a acquisitas; idem problema pro medio resistente soluetur curua MA , quae praescripta ratione ex curua ma construitur.

Corollarium 5.

816. Si igitur curua ma fuerit cyclois seu tautochrone in vacuo; AM erit tautochrone descensuum in medio resistente supra inuenta. Posito enim $r^2 = 2at$ seu $rdr =adt$; prodibit substitutis loco r et t inuentis valoribus ista aequatio $2ke^{\frac{-s}{2k}}ds(1 - e^{\frac{-s}{2k}}) = ae^{\frac{-s}{k}}dx$ seu $adx = 2kds$
 $(e^{\frac{s}{2k}} - 1).$

Exemplum.

817. Sit am linea recta vtcunque inclinata, ita vt sit $r = nt$; erit tempus descensus, quo celeritas altitudini b debita generatur $= \int \frac{ndt}{\sqrt{(b-gt)}} = \frac{2n\sqrt{b}}{g}$. Eandem ergo habebit proprietatem curua MA , vt tempus cuiusque descensus in medio resistente quo celeritas \sqrt{b} generatur, sit $= \frac{2n\sqrt{b}}{g}$ seu proportionale ipsi celeritati genitae. Cum autem sit $r = nt$; erit $dr = ndt$; in qua si loco dr et dt valores inuenti substituantur prodibit $e^{\frac{-s}{2k}}ds = ne^{\frac{-s}{k}}dx$

dx seu $n dx = e^{\frac{s}{2k}} ds$; quae est aequatio pro tractoria filo longitudinis $2k$ generata, qualis repraesentatur in fig. 2. Tab. XVI. nempe curua CA, quae in A eam habet inclinationem quam recta data ma .

Scholion I.

§ 18. Quemadmodum hic curua MA est determinata, super qua omnes descensus in medio resistente iisdem absoluuntur temporibus, quibus descensus in vacuo super curua ma , si celeritates vltimae in A et a fuerit aequales; ita eodem modo curua MA potest definiri, super qua omnes ascensus in medio resistente iisdem temporibus absoluuntur, quibus similes iisdem celeritatibus incipientes ascensus in vacuo super curua am . Nam cum in medio resistente descensus in ascensum mutetur facto k negatiuo; si ponantur $AP = x$ et $AM = s$ habebitur $x = \int \frac{4k^2 dt}{(2k + r)^2}$ et $s = 2k \int \frac{2k + r}{2k} dx$ seu inuerse $t = \int e^{\frac{s}{k}} dx$ et $r = 2k(e^{\frac{s}{2k}} - 1)$. Ex quibus tum facile curua AM potest construi et aequatio pro ea inueniri.

Scholion 2.

§ 19. In hoc problemate ex curua descensuum in vacuo data determinauimus curuam descensuum in medio resistente. Facile autem apparet vicissim ex data curua AM pro medio resistente alteram am pro vacuo inueniri posse. Cum enim sit $r = 2k(1 - e^{-\frac{s}{2k}})$ et $t = \int e^{\frac{s}{k}} dx$ constructio curuae am ope harum duarum aequationum perficitur. Aequatio vero pro curua

am

am inter t et r commodius ex data aequatione inter x et s reperitur; si in ea loco x substituatur $\int \frac{4k^2 dt}{(2k-r)^2}$ et $2kl \frac{2k}{2k-r}$ loco s . Quod hic praeterea de descensibus dictum est, idem de ascensibus valet, si modo k ponatur negativum vti in Scholio I. monuimus.

Scholion 3.

420. Tradita hic inuentio alterius curuae duarum am et AM ex altera etiam locum habet, si datae curuae non habeatur aequatio, sed si manu vtcunque fuerit ducta; ex formulis enim inuentis constructio potest deduci, quae ab aequatione non amplius pendeat. Quamobrem cum in cap. praec. (432.) in casum inciderimus pro vacuo quo curuam cm inuenimus cum data ac iungendam, vt

Tab. XVI,
Fig. 6.

omnes descensus ex quouis puncto curuae cm vsque ad a aequalibus absoluantur temporibus; similia exempla ex iis pro medio resistente erui poterunt, quibus linea ex partibus duarum diuersarum curuarum composita fit tautochrone. Si enim curua acm fuerit huiusmodi curua tautochrone pro vacuo, ex ea per solutionem huius problematis similis curua composita pro medio resistente inuenietur. Scilicet ex ac methodo tradita curua AC definiatur; qua inuenta posita $bp = t$, $cm = r$; et $BP = x$, atque $CM = s$; et praeterea $ab = a$, $ac = c$ et $AB = A$ et $AC = C$; tum enim cum data sit aequatio inter t et r erit $AP = A + x = \int \frac{4k^2 dt}{(2k-c-r)^2}$ et $AM = C + s = 2kl \frac{2k}{2k-c-r}$.
At

456 CAPUT TERTIUM DE MOTU PUNCTI

At si pro medio resistente data fuerit curua AC; atque requiratur altera CM eius proprietatis, vt omnes descensus super MCA aequalibus absoluantur temporibus; solutio non dissimili modo efficitur. Nam ex data curua AC pro medio resistente, inueniatur curua eiusdem proprietatis pro vacuo *ac* per Scholion 2. Qua inuenta quaeratur curua *cm* ei adiungenda, quae omnes descensus in vacuo isochronos producat (432.). Denique methodo modo tradita ex curua composita *acm* pro vacuo quaeratur similis curua composita pro medio resistente ACM, cuius quidem pars AC iam est cognita, quippe ex ea lineam *ac* definiuimus. Idem ergo problema quod in vacuo tantum in se habebat difficultatis, in medio quoque resistente resoluitur. Denique hinc caput hoc finiens Lectorem beneuolum rogo, vt antequam ad caput sequens progrediatur, quae in Cap. I. ab §. 58. vsque ad finem cap. tradita sunt, repetere velit.

CAPUT

CAPUT QUARTUM

DE

MOTU PUNCTI SUPER DATA SUPERFICIE.

PROPOSITIO 90.

Problema.

821.

Data via in superficie quacunque $Mm\mu$; inuenire eius positionem respectu plani dati APQ , et radii osculi illius viae in M tam positionem quam longitudinem; nec non normalis in superficiem situm.

Tab. XVII.

Fig. 1.

Solutio.

Sumto pro lubitu plano APQ in eoque axe AP , quorum respectu positio curvae $Mm\mu$ sit determinanda; ex tribus punctis proximis M , m et μ datae viae in superficie in planum APQ demittantur perpendiculara MQ , mq , μq ; atque ex punctis Q , q , q ad axem AP perpendiculara QP , qp et $q\pi$. Posito nunc initio abscissarum in A , sit $AP=x$; $PQ=y$ et $QM=z$. Quia porro superficies data ponitur, dabitur aequatio eius naturam exprimens inter tres has variables x , y et z ; quae aequatio sit haec $dz = Pdx + Qdy$. Cum hac aequatione si coniungatur alia aequatio, exprimetur linea quaedam in ista superficie existens; quare cum linea $Mm\mu$ data

Tom. II.

M m m

po-

458 CAPUT QUARTUM DE MOTU PUNCTI

ponatur dabitur praeter aequationem $dz = Pdx + Qdy$ insuper alia aequatio, qua curua $Mm\mu$ determinatur, quam autem hic repraesentare non est opus. Sint elementa abscissae Pp , $p\pi = dx$ inter se aequalia, seu sumatur elementum dx constans. Erit ergo $pq = y + dy$; $\pi z = y + 2dy + ddy$; atque $qm = z + dz$, et $z\mu = z + 2dz + ddz$. His positis sit MN normalis in superficiem in puncto M , et N punctum quo haec normalis plano APQ occurrit, demittatur ex N in axem perpendiculum NH ; erit $AH = x + Pz$ et $HN = -Qz - y$ (68). Sit nunc MR positio radii osculi curvae $Mm\mu$, et R incidentia eius in planum APQ ; erit ex R in axem demisso perpendiculo RX ; $AX = \frac{zdx(dyddy + dzddz)}{(dx^2 + dy^2)ddz - dydzddy} + x$; atque $XR = \frac{zdx^2ddy + zdz(dzddy - dyddz)}{(dx^2 + dy^2)ddz - dydzddy} - y$ (68). Longitudo vero radii osculi scilicet $MO =$

$$\frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{V(dx^2(ddy^2 + ddz^2) + (dyddz - dzddy)^2)} \quad (72).$$

Denique concipiatur planum, in quo sita sunt elementa Mm , $m\mu$, productum, donec planum APQ interfecet sitque intersectio recta RKI , cui ex A erecta perpendicularis in K occurrat, et ex P in V ; inuentum est supra esse $PV = \frac{zddy}{ddz} - y$ (68). Cum nunc sit $XR - PV : AX - AP = PV : PI$, erit $PI =$

$$\frac{(AX - AP)PV}{XR - PV}. \text{ Est vero } AX - AP = \frac{zdx(dyddy + dzddz)}{(dx^2 + dy^2)ddz - dydyddy} \text{ atque } XR - PV = \frac{zddydz(dz^2 - dy^2) + zdydz(ddy^2 - ddz^2)}{ddz((dx^2 + dy^2)ddz - dydzddy)}. \text{ Quibus substitutis erit } PI = \frac{dx(dyddy + dzddz)(zddy - yddz)}{ddyddz(dz^2 - dy^2) + dydz(ddy^2 - ddz^2)} =$$

$\frac{zdxddy - ydxddz}{dxddy - dyddz}$ atque $AI = PI = AP =$
 $\frac{zdxday - ydxddz - xdzddy + xdyddz}{dzday - dyddz}$. Hinc reperitur $AK =$
 $\frac{PV \cdot AI}{PI} = \frac{zdxddy - ydxddz - xdzddy + xdyddz}{dxddz}$. Plani vero in
 quo sita sunt elementa Mm et $m\mu$, inclinatio ad
 planum APQ inuenietur, demittenda ex Q perpen-
 diculari QS ad intersectionem RI ; erit enim tan-
 gens anguli inclinationis $= \frac{QM}{QS}$. At cum sit $IV : PI$
 $QV : QS$ erit illa tangens $= \frac{QM \cdot IV}{PI \cdot QV} =$
 $\frac{\sqrt{(dx^2ddz^2 + (dzddy - dyddz)^2)}}{dxddy}$. Anguli vero NMR , quem
 radius osculi cum normali in superficiem constituit,
 tangens est $= \frac{ddy(dx + Pdz) - ddz(Pdy - Qdx)}{(daz - Qddy)\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}} (71)$. Ex
 his igitur omnia deduci possunt, quae ad positio-
 nem curuae $Mm\mu$ cognoscendam requiruntur. Q.E.I.

Corollarium I.

822. Curuae $Mm\mu$ projectio in plano APQ
 est curua $Qq\varrho$, cuius natura exprimitur aequatione
 inter x et y . Quare ista projectio habebitur, si ope
 aequationum $dz = Pdx + Qdy$, et eius, qua ipsa cur-
 ua in superficie ducta determinatur, noua formetur
 aequatio eliminanda variabili z , quae sit inter x et
 y tantum.

Corollarium 2.

823. Simili modo, si eliminetur x , vt pro-
 deat aequatio inter y et z ; hac aequatione definie-
 tur projectio curuae $Mm\mu$ in plano quod est norma-
 le ad axem AX . Atque aequatio in qua non inest y ,

Mmm 2
fed

fed' tantum x et z dabit projectionem curvae Mmp in plano, quod normaliter planum APQ secundum ax in AX interfecat.

Corollarium 3.

824. Curvae autem Mmp natura ex duabus eius projectionibus in duobus planis inuicem normalibus distincte cognoscitur. Qualem cognitionem quoque suppeditat vnica projectio vna cum ipsa superficie.

Corollarium 4.

825. Quamobrem ad curuam in superficie data quaecunque characteribus designandam requiritur, vt praeter aequationem $dz = Pdx + Qdy$, qua superficies determinatur, detur aequatio duas tantum variables inuoluens pro projectione quapiam curvae Mmp .

Corollarium 5.

826. Si superficies secetur plano, simili modo, quo conus ad sectiones conicas producendas fecari solet, curua ex hac sectione orta erit in eodem plano. Quare his casibus tam positio rectae IR erit constans, quam plani IMR inclinatio ad planum APQ .

Exemplum.

827. Si igitur detur superficies quaecunque eaque secetur plano IMR , quaeratur curua hac sectione-

tionem orta. Ad hoc ponatur $AI=a$; $AK=b$; et anguli inclinationis plani IMR ad planum APQ tangens $=m$; eritque $a=\frac{zdxddy-ydxddz}{dzddy-ayddz}-x$ et $b=\frac{zdxddy-ydxddz-xdzddy+ydyddz}{dxddy}$, atque $m=\frac{\sqrt{(dx^2ddz^2+(dzddy-ayddz)^2)}}{dxddy}$. Ex quibus aequationibus coniunctis cum $dz=Px-Qdy$ natura curua hac sectione genitae determinabitur. Ex prioribus vero duabus aequationibus oritur $\frac{b}{a}=\frac{dzddy-ayddz}{dxddz}$ seu $ddz:ddy=adz:bdx+ady$; cuius aequationis integralis est $\frac{1}{a}ldz=\frac{1}{a}l(bdx+ady)-\frac{1}{a}lc$, seu $cdz=bdx+ady$, et porro $cz=bx+ay+ff$. In prima vero aequatione si loco ddz et ddy eorum proportionalia substituantur, prodibit $a+x=\frac{bzdx+azdy-aydz}{b dz}$ seu $abdz+bx dz=bzdx+azdy-aydz$, cuius per z diuisae integralis est haec $c-\frac{ab}{z}=\frac{bx+ay}{z}$ seu $cz=bx+ay+ab$ quod ergo ante erat ff hic est ab seu $ff=ab$. Constantem vero c tertia aequatio definiet; erit autem $m=\frac{dz\sqrt{(a^2+b^2)}}{bdx+ady}$ seu $\frac{dz\sqrt{(a^2+b^2)}}{m}=ady+bdx$. Quare erit superior littera $c=\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}}{m}$, atque praeter aequationem superficiei naturam exprimentem habetur ista $\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}}{m}=bx+ay+ab$, ex quibus natura quaesitae curuae est deriuanda. Quia autem tota curua quaesita est in plano IMR , commodissime ea exprimitur aequatione inter coordinatas orthogonales in eodem plano sumtas. Sumto ergo IR pro axe, ex M in eum demittatur perpendicularum MS et vocetur $IS=t$ et $MS=u$. Est vero $IA:AK=IP:PV$ seu $PV=\frac{at-bx}{a}$ et $QV=\frac{ab-bx-ay}{a}=\frac{z\sqrt{(a^2+b^2)}}{ma}$. Porro est

462 CAPUT QUARTUM DE MOTU PUNCTI

$V(a^2 + b^2): a = \frac{z\sqrt{a^2 + b^2}}{ma}: QS$; quare erit $QS = \frac{z}{m}$ et $SV = \frac{bz}{ma}$. Ex his prodibit $MS = u = \frac{z\sqrt{(1+m^2)}}{m}$ atque $IS = t = \frac{m(a+x)\sqrt{(a^2 + b^2)} - z}{m^2}$. Ex quo oritur $z = \frac{mu}{\sqrt{(1+m^2)}}$ et $x = \frac{bu + at\sqrt{(1+m^2)}}{\sqrt{(a^2 + b^2)}(1+m^2)} - a$ et substitutis his valoribus in aequatione $\frac{z\sqrt{(a^2 + b^2)}}{m} = bx + ay + ab$ prodibit $y = \frac{au - bt\sqrt{(1+m^2)}}{\sqrt{(1+m^2)}(a^2 + b^2)}$. His igitur valoribus loco x, y et z in aequatione superficiei substitutis proueniet aequatio inter t et u seu coordinatas orthogonales curuae quaesitae.

Corollarium 6.

828. Si interseccio plani secantis IR in ipsum axem AX incidat sumaturque I in A; erit $z = \frac{mu}{\sqrt{(1+m^2)}}$; $y = \frac{u}{\sqrt{(1+m^2)}}$ et $x = t$.

Corollarium 7.

829. Si interseccio IR plani secantis SMR cum plano APQ fuerit normalis ad axem AX erit $b = \infty$. Quare prodibunt $z = \frac{mu}{\sqrt{(1+m^2)}}$; $x = \frac{u}{\sqrt{(1+m^2)}}$ $-a$ et $y = -t$.

Corollarium 8.

830. Cum valores loco z, y et x substituendi sint vnus dimensionis ipsarum t et u , perspicuum est aequationem inter t et u non plures habere posse dimensiones, quam ipsam aequationem inter z, y et x .

Co-

Corollarium 9.

831. Quare si aequatio inter z , y et x fuerit duarum dimensionum, cuiusmodi praeter conicam innumerabiles dantur superficies, omnes sectiones plano factae erunt sectiones conicae.

Scholion.

832. In Comment. Tom. III. ea dissertatio-
ne, in qua lineam breuissimam in superficie quacun-
que determinavi, tria praecipue superficierum ge-
nera sum persecutus, quae erant cylindrica, conica
et tornata seu rotunda. Aequatio vero genera-
lis $dz = Pdx + Qdy$ dat superficies cylindricas si P
evanescit et Q tantum ab y et z pendeat, ita ut
aequationem pro hoc superficierum genere abscissa
 x non ingrediatur; omnes enim sectiones inter se
parallelae sunt quoque aequales; pro his ergo est
aequatio $dz = Qdy$. Ad genus conoidicum refero
omnes eas superficies quae generantur ducendis
rectis ex singulis curvae cuiuspiam punctis ad pun-
ctum fixum extra planum eius curvae situm. Quae
superficies hanc habent proprietatem, ut omnes
sectiones parallelae sint inter se similes earumque la-
tera homologa, ut distantiae sectionum a vertice
coni. Aequationes vero pro huiusmodi superficie-
bus, si quidam vertex poli fuerit in A , ita sunt
comparatae, ut x , y et z coniunctim ubique eun-
dem dimensionum numerum constituent. Superfi-
cies denique tornatae seu rotundae mihi sunt, quae
gene-

generantur conuersione cuiuscunque curuae circa axem, qui axis si fuerit AX, posito x constante aequatio inter y et z dabit circulum centri P. Quare aequatio pro iis hanc habebit formam $dz = Pdx - \frac{ydy}{z}$, seu $zdz + ydy = zPdx$, vbi Pz ab x tantum pendet; seu est $Q = -\frac{y}{z}$ et $P = \frac{x}{z}$ existente X functione ipsius x . Quemadmodum autem in his superficiebus tornatis omnes sectiones axi normales sunt circuli, ita tales superficies concipi possunt, quarum sectiones axi normales sint curuae quaecunque similes. Tales superficies omnes hac continebuntur proprietate generali vt functio quaecunque ipsius x aequalis sit functioni eiusdem vbique dimensionum ipsarum y et z numeri. Vt si iste dimensionum numerus fuerit n ; aequationis $Pdx = Rdz + Qdy$ pro ea haec erit proprietas vt sit $Rz + Qy = n \int Pdx$, vel $Rdx + Qdy = \frac{zdR + ydQ}{n-1}$. Ex quo, an data aequatio sit ad huiusmodi superficiem, statim concludi potest.

PROPOSITIO 91.

Problema.

§33. *In superficie quacunque data lineam determinare, quam corpus in ea motum et a nullis potentiis sollicitatum describit tam in vacuo quam in medio quocunque resistente.*

So.

Solutio.

Quia corpus a nullis potentiis absolutis sollicitari ponitur, linea ab eo in superficie descripta erit linea breuissima in vacuo (62.). Medii autem resistentis vis celeritatem corporis tantum imminuit, neque directionem vlllo modo afficit, quare etiam in medio resistente via a corpore in quavis superficie descripta erit pariter breuissima. Manentibus igitur vt ante $AP=x$, $PQ=y$ et $QM=z$, sit $dz=Pdx+Qdy$ aequatio superficiei naturam exprimens, atque Mm , $m\mu$ duo lineae breuissimae cuiuspiam elementa. Ex his supra pro linea breuissima inuenta est haec aequatio $Pdzddy+dxddy=Pdyddz-Qdxddz$ (69.), vnde oritur $ddz=\frac{(Pdz+dx)ddy}{Pdy-Qdx}$. At aequatio ad superficiem differentiatam dat $ddz=dPdx+Qddy+dQdy$, ex quibus coniunctis fit $ddy==\frac{(Pdy-Qdx)(dPdx+dQdy)}{dx(1+P^2+Q^2)}$ et $ddz=\frac{(Pdz+dx)(dPdx+dQdy)}{dx(1+P^2+Q^2)}$. Dato ergo elemento Mm , sequens $m\mu$ in linea breuissima inuenietur; erit enim $\pi g=PQ+2dy+ddy$ et $g\mu=QM+2dz+ddz$, et ipsarum ddy et ddz valores sunt inuenti. Quare hinc sequentis cuiusque elementi positio determinatur, atque ipsius lineae breuissimae natura per quamcunque eius projectionem cognoscitur. Q. E. I.

Corollarium I.

834. Si in aequatione pro superficie P et Q tantum per x et y dantur, aequatio $ddy==$

Tom. II.

Nnn

(Pdy

$\frac{(Pdy - Qdx)(dPdx + dQdy)}{dx(1 + P^2 + Q^2)}$ proiectionem lineae breuissimae in plano APQ denotat.

Corollarium 2.

635. Pro linea ergo breuissima $Mm\mu$ sumtis elementis axis aequalibus erit $\pi g = y + 2dy + \frac{(Pdy - Qdx)(dPdx + dQdy)}{dx(1 + P^2 + Q^2)}$ atque $g\mu = z + 2dz + \frac{(Pdz + dx)(dPdx + dQdy)}{dx(1 + P^2 + Q^2)}$, ex quibus aequationibus punctum μ ex duobus praecedentibus M et m cognoscitur.

Corollarium 3.

836. Quia pro linea breuissima angulus RMN euanesceat (71.), incidet R in N , positio ergo radii osculi ita se habebit, vt sit $AX = x + Pz$ et $XR = -Qz - y$. Longitudo vero radii osculi erit $= -\frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}{dPdx + dQdy}$.

Corollarium 4.

837. Planum vero IMR in quo sita sunt elementa lineae breuissimae $Mm\mu$ ita determinabitur, vt sit $AL = -x + \frac{y(dx + Pd z) - z(Pdy - Qdx)}{Qdz + dy}$; et $AK = -y + \frac{z(Pdy - Qdx) + x(dy + Qdz)}{dx + Pd z}$. Tangens vero anguli quem planum IMR cum plano APQ constituit erit $= \frac{\sqrt{((dx + Pd z)^2 + (dy + Qdz)^2)}}{Pdy - Qdx}$. Huiusque anguli secans est $= \frac{\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}{Pdy - Qdx}$, seu cosinus $= \frac{Pdy - Qdx}{\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$.

Exem-

Exemplum I.

838. Sit superficies cylindrica quaecunque axem habens AP, exprimetur eius natura hac aequatione $dz = Qdy$ euanescente P in generali aequatione $dz = Pdx + Qdy$. Quare pro projectione lineae breuissimae huius superficiei in plano APQ habebitur ob $P=0$ et $dP=0$ haec aequatio $ddy = \frac{-QdQdy}{1+Q^2}$ seu $l \frac{a dx}{dy} = l \sqrt{1+Q^2}$ et $adx = dy \sqrt{1+Q^2}$, si quidem Q tantum per y detur; at si Q per y et z detur variabilis z est eliminanda ope aequationis $dz = Qdy$. Vti in cylindro circulari in quo est $z^2 + y^2 = a^2$; erit $z = \sqrt{a^2 - y^2}$, et $Q = \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$. Quare erit $adx = \frac{ady}{\sqrt{a^2 - y^2}}$. In genere autem $\int dy \sqrt{1+Q^2}$ exprimit arcum sectionis ad axem AP normalis; quare dicto hoc arcu $= s$ erit $ax = s$. Ex quo intelligitur, si talis superficies in planum explicetur, fore lineam breuissimam rectam; vti constat.

Exemplum 2.

839. Sit superficies proposita conica quaecunque verticem habens in A; aequatio pro tali superficie ita poterit adaptari, vt z aequetur functioni vnus dimensionis ipsarum x et y. Quare in aequatione $dz = Pdx + Qdy$, litterae P et Q erunt functiones nullius dimensionis ipsarum x et y. Hanc ob rem, vti iam alibi ostendi, erit $Px + Qy = 0$, seu $Q = \frac{-Px}{y}$; vnde fiet $dQ = \frac{Px dy - Py dx - y x dP}{y^2}$;
Nnn 2
et

$$\text{et } Pdy - Qdx = \frac{P(ydy + xdx)}{y^2}; \text{ atque } dPdx + dQdy = \frac{y^2 dPdx + Pxdy^2 - Py(xdy - yxdPdy) - (ydx - xdy)(y dP - P dy)}{y^2}$$

$$\text{et tandem } (1 + P^2 + Q^2) = \frac{y^2 + P^2 y^2 + P^2 x^2}{y^2}. \text{ Quibus sub-}$$

$$\text{stitutis erit } ddy = \frac{P(ydy + xdx)(ydx - xdy)(y dP - P dy)}{y dx (y^2 + P^2 y^2 + P^2 x^2)}. \text{ Po-}$$

natur $y = p x$; acquabitur P functioni cuidam ipsius p tantum, quia P est functio nullius dimensionis ipsarum x et y . Erit vero $dy = p dx + x dp$ et ddy

$$= x ddp + 2 dx dp = - \frac{P(p^2 x dx + p x^2 dp + x dx)(p x dP - P p dx - P x dP) x^2 dp}{p x^3 dx (p^2 + P^2 p^2 + P^2)}$$

$$= - \frac{P dp (p^2 dx + p x dp + dx)(P p dx + P x dP - p x dP)}{p dx (p^2 + P^2 + P^2 p^2)}. \text{ Ex qua ae-}$$

quatione quidem projectio difficulter cognoscitur. Quomodo autem linea breuissima in tali superficie sit determinanda fusius docui in Comment. III. p. 120. Ceterum idem de linea breuissima est notandum quod ante, scilicet quod ea in planum explicata superficie conica abeat in rectam.

Scholion.

840. Simili modo in determinandis lineis breuissimis super aliis superficiebus speciebus non hic immoror, quia in cit. loco hanc materiam plenius exposui. Progredior ergo ad inuestigationem linearum, quae in superficie a corpore a quibuscunque potentiis sollicitato describuntur. Antea vero necesse est, ut in effectus cuiusque potentiae curatius inquiramus.

DEFINITIO 4.

841. *Vim prementem vocabimus in sequentibus eam vim normalem, cuius directio est normalis ad ipsam superficiem in qua corpus mouetur.* Co-

Corollarium.

842. Haec vis premens ergo vel auget vim centrifugam vel minuit, prout eius directio directioni radii osculi lineae breuissimae vel contraria est vel in eam incidit (79.).

DEFINITIO 5.

843. *Vim deflectentem vocabimus in sequentibus eam vim normalem, cuius directio est in plano superficiei tangente et perpendicularis in viam a corpore descriptam.*

Corollarium.

844. Haec ergo vis corpus a linea breuissima, quam a nullis potentiis sollicitatum describeret, deflectit, et vel cis vel ultra eam detrahit pro eius directione vel cis vel ultra tendente.

PROPOSITIO 92.

Problema.

845. *Determinare effectum vis prementis in corpus super superficie quacunque motum, quod praeterea a nullis potentiis sollicitatur.*

Fab. XVII.
Fig. 1.

Solutio.

Quia haec vis premens est normalis in superficie, ideoque eius directio MN; ea neque

Nnn 3

cele-

celeritatem, neque directionem motus afficiet, sed tota in pressione superficiei consumetur, corpus igitur in eadem linea progredietur, in qua si haec vis abesset, moueretur; quae autem est linea breuissima in prop. praec. determinata. Mouebitur ergo corpus in linea $Mm\mu$, cuius radius osculi MO incidet in normalem superficiei MN . Sit ergo MN directio huius potentiae prementis, quae propterea superficiem versus interiora secundum MN premet. Ponatur haec vis premens $=M$; premetur ab ea superficies secundum MN vi $=M$. At si radius osculi MO in eandem plagam incidere ponatur, vis centrifuga vi prementi erit contraria eiusque effectum minuet. Cum autem $Mm\mu$ sit linea breuissima, est radius osculi $MO = -\frac{(dx^2+dy^2+dz^2)\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}{dPdx+dQdy}$, per quem si diuidatur dupla altitudo v celeritati in M debita, prodibit vis centrifuga. Hanc ob rem erit vis, qua superficies secundum MN premitur $===== + \frac{2v(dPdx+dQdy)}{(dx^2+dy^2+dz^2)\sqrt{(1+P^2+Q^2)}} + M$. Positio tandem huius vis prementis per superiora inuenta est $AH = x + Pz$ et $HN = -Qz - y$; demisso scilicet ex puncto N , in quo normalis MN plano APQ occurrit, ad axem perpendiculo NH . Q. E. I.

Corollarium I.

846. Cum neque altera vis normalis defle-
ctens, neque vis tangentialis neque vis resistentiae,
si quae adest, pressionem in superficiem afficiant;
per-

perspicitur, a quibuscunque potentiis corpus praeterea sollicitetur, pressionem semper tantam esse quantam hic assignauimus.

Corollarium 2.

847. Quantumvis igitur via a corpore descripta a linea breuissima discrepet, tamen pressio in superficiem fit secundum normalem in superficiem, seu secundum radium osculi lineae breuissimae, non vero secundum ipsius curuae descriptae radium osculi, cuius longitudo etiam ad pressionem non requiritur.

Scholion.

848. Ob hanc causam eam radii osculi lineae breuissimae formulam adhibuimus, in qua differentialia secundi gradus non insunt, ne is pendeat a positione duorum elementorum Mm et $m\mu$, per quae corpus reipsa mouetur. Sed iste radius osculi ex vnico elemento Mm innotescere debet: Si enim corpus propter vim deflectentem non lineam breuissimam describat, differentialia secundi gradus ddy et ddz non amplius in radium osculi lineae breuissimae ingredi debent.

PROPOSITIO 93.

Problema.

849. *Vis tangentialis, quae secundum tangentem* ^{Tab. XVII.}
MT corpus trahit, effectum in corpus in superficie ^{Fig. 2.}
quacunque motum determinare.

So-

Solutio.

Sit haec vis tangentialis $=T$, corpusque per elementum Mm progrediatur celeritate altitudi-
ni v debita; quia haec vis motum diminuit, erit
 $dv = -T$. $Mm = -TV(dx^2 + dy^2 + dz^2)$, ma-
nentibus iisdem denominationibus, quibus ante
sumus vfi. Praeterea vero haec vis neque pres-
sionem neque deviationem a linea breuissima af-
ficit. Ad positionem vero directionis huius vis
inueniendam, producat tangens MT donec oc-
currat plano APQ in T ; erit T punctum in ele-
mento qQ producto. Fiat ergo $dz : V(dx^2 + dy^2)$
 $= z : QT$; eritque $QT = \frac{zV(dx^2 + dy^2)}{dz}$. Ex T de-
mittatur in axem perpendiculum TF ; erit $V(dx^2$
 $+ dy^2) : dx = QT : PF$; quare habetur $PF = \frac{zdx}{dz}$ et
 $AF = \frac{zdx - xdz}{dz}$. Porro ob $dx : dy = \frac{zdx}{dz} : y - FT$ erit
 $FT = y - \frac{zdy}{dz}$; ex quo punctum T determinatur.
Q. E. I.

Corollarium.

850. Cum resistentia ad vim tangentialem fit
referenda, ex his intelligitur, quomodo resisten-
tiae effectus sit determinandus. Vt si fuerit re-
sistentia $=R$, erit $dv = -(T+R)V(dx^2 + dy^2$
 $+ dz^2)$.

PROPOSITIO 94.

Problema.

Tab. XVII.
Fig. 3.

851. *Vis normalis deflectentis N effectum in
corpus super superficie quacunque motum determinare.*

Solu-

Solutio.

Positis vt ante $AP=x$, $PQ=y$ et $QM=z$, exprimatur superficiēi natura hac aequatione $dz = Pdx + Qdy$; et moueatur corpus celeritate altitudini v debita per elementum Mm : quo percurso, nisi vis deflectens adesset, progredieretur per elementum $m\mu$ secundum lineam breuissimam; foretque $\pi\varrho = y + 2dy + \frac{(Pdy - Qdx)(dPdx + dQdy)}{dx(1+P^2+Q^2)}$ et $\varrho\mu = z + 2dz + \frac{(dx + Pd\varrho)(dPdx + dQdy)}{dx(1+P^2+Q^2)}$ (835.). Iam accedat vis normalis deflectens N , quae directionem habeat antrorsum. Haec ergo vis efficiet, vt corpus descripto elemento Mm non per $m\mu$ incedat, sed ab hac directione antrorsum deflectat. Ponamus igitur pergere per $m\nu$, erunt Mm et $m\nu$ duo elementa curuae a corpore descriptae. Quare demisso ex ν in planum APQ perpendicularo $\nu\sigma$; erit $\pi\sigma = y + 2dy + ddy$ et $\sigma\nu = z + 2dz + ddz$. Hinc ergo habebitur $\sigma\varrho = \frac{(Pdy - Qdx)(dPdx + dQdy)}{dx(1+P^2+Q^2)} - ddy$ et $\mu\varrho - \nu\sigma = \frac{(dx + Pd\varrho)(dPdx + dQdy)}{dx(1+P^2+Q^2)} - ddz$. Posito vero breuitatis ergo $\frac{(Pdy - Qdx)(dPdx + dQdy)}{dx(1+P^2+Q^2)} = dd\eta$ et $\frac{(dx + Pd\varrho)(dPdx + dQdy)}{dx(1+P^2+Q^2)} = dd\zeta$, inuenietur radius osculi angulo elementari $\mu m\nu$ respondens =====

$$(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$V((dzdd\eta - dzddy - dydd\zeta + dyddz)^2 + dx^2(dd\eta - ddy)^2 + dx^2(dd\zeta - ddz)^2)$$

Hic ergo si dicatur $=r$ erit $N = \frac{2v}{r}$ seu $2v = Nr$, quia hic angulus eodem modo generatur, quo corpus a vi normali in plano a linea recta de-

Tom. II.

O o o

flecti-

474 CAPUT QVARTVM DE MOTV PVNCTI

flectitur. Est vero $dzdd\eta - dydd\zeta = -\frac{(dy + Qdz)(dPdx + dQdy)}{(1 + P^2 + Q^2)}$

Atque loco $dd\eta$ et $dd\zeta$ debitis valoribus substitutis fit

$$r = \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{V(dx^2(ddy^2 + ddz^2) + (dzddy - dyddz)^2 - \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)(dPdx + dQdy)^2}{1 + P^2 + Q^2})}$$

Cum autem per aequationem $dz = Pdx + Qdy$ fit $dPdx + dQdy = ddz - Qddy$, erit in subsidium hac ipsa aequatione $dz = Pdx + Qdy$ vocata $r =$

$$\frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}} V(1 + P^2 + Q^2)}{-ddy(dx + Pdz) + ddz(Pdy - Qdx)}$$

Hanc ob rem

$$\text{erit } ddz(Pdy - Qdx) - ddy(dx + Pdz) = \frac{N}{2v}(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}} V(1 + P^2 + Q^2). \quad Q. E. I.$$

Scholion I.

852. Congruit haec formula cum ea, quam supra (79) pro effectu huiusmodi vis determinando inuenimus. Differentia enim tantum est in signo litterae N, quam vim ibi negatiue accipiendam esse apparet. Atque hic etiam de signo non certi esse potuiffemus, quia ex quantitate radix quadrata, quam hic extraximus, aequae potest esse negatiua ac affirmatiua. Hoc vero dubium, si calculus ad casum specialem accommodetur, statim tollitur; quia formula eiusmodi esse debet, vt punctum v cis μ cadat si potentia N antrorsum, vt posuimus, fuerit directa. Ex quo ope exempli etiam signum radice quadratae determinauimus; atque hanc ipsam formulam inuenimus.

Co-

Corollarium I.

853. Si vis deflectens N evanescat, corpus motum suum in linea breuissima continuabit; id quod ipsa aequatio quoque indicat. Posito enim $N=0$, habebitur $ddy(dx+Pdz)=ddz(Pdy-Qdx)$, quae aequatio est pro linea breuissima.

Corollarium 2.

854. Quaecunque ergo vis premens, et vis tangentialis atque resistentia corpus in superficie motum sollicitet, si modo nulla affuerit vis deflectens, corpus semper in linea breuissima mouebitur.

Scholion 2.

855. Quod autem ad positionem huius vis deflectentis N attinet, ea ex hoc deducetur, quod ea posita sit in plano tangente superficiem, atque simul sit normalis curuae descriptae; sit ergo MG eius directio et G punctum, in quo plano APQ occurrit; ita ut vis N secundum MG trahere censenda sit, dum eam ante antrorsum virgere posuimus. Primo ergo determinari debet intersectio plani superficiem in M tangentis intersectio cum plano APQ , quae sit recta TVG ; Haec vero inuenietur, si duae tangentes superficiem ad planum APQ vsque producantur, atque puncta, in quibus in planum APQ incidunt linea recta iungantur. Sit ergo MT tangens lineae descriptae,

Tab. XVII.
Fig. 4.

476 CAPUT QUARTUM DE MOTU PUNCTI

quae propterea superficiem quoque tanget; erit
 ut iam inuenimus $AF = \frac{zdx}{dz} - x$ et $FT = y - \frac{zdy}{dz}$
 (849.). Porro superficies secta intelligatur plano
 PQM, fitque MV sectionis huius tangens; erit QV
 $= \frac{z}{Q}$, ex aequatione $dz = Pdx + Qdy$ posito $dx = 0$.
 Innotescit ergo punctum V, quocirca recta TV
 producta erit intersectio plani tangentis superfi-
 ciem in M cum plano APQ. Punctum ergo G
 in quo recta MG plano APQ occurrit, positum
 erit in recta TV. Porro in recta TQ sumatur
 $QS = \frac{zdz}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$; eritque MS normalis in elemen-
 tum Mm descriptum. Atque si ad QS ducatur
 normalis SG, ex hac recta SG omnes rectae ad
 M ductae erunt in elementum Mm perpendicu-
 lares. Quare cum MG sit quoque normalis in ele-
 mentum descriptum, punctum G quoque positum
 erit in recta SG. Punctum ergo G erit in in-
 tersectione rectarum TV et SG. Est vero $PL =$
 $\frac{ydy + zdz}{dx}$, et ang. $ELG = \text{ang. } PQT$. Ponatur GE
 $= t$, erit $LE = \frac{tdy}{dx}$, et $PE = \frac{ydy + tdy + zdz}{dx}$. Deinde
 etiam propter triangula similia est $FP:FT+PV$
 $= PE:GE - PV$, hoc est $\frac{zdx}{dz} : \frac{z}{Q} - \frac{zdy}{dz} = \frac{ydy + tdy + zdz}{dx}$.
 $t - \frac{z}{Q} + y$. Hinc provenit $t = \frac{z(dx + Pdz)}{Qdx - Pdy} - y = GE$,
 et $AE = x + \frac{z(dy + Qdz)}{Qdx - Pdy}$, unde punctum G deter-
 minatur. Si ergo ducatur recta QG erit $QG^2 =$
 $\frac{z^2(dx + Pdz)^2}{(Qdx - Pdy)^2} + \frac{z^2(dy + Qdz)^2}{(Qdx - Pdy)^2}$, et $QG = \frac{z\sqrt{(dy^2 + dz^2 + dz^2(1 + P^2 + Q^2))}}{Qdx - Pdy}$
 atque ipsa $MG = \frac{z(dy^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}{Qdx - Pdy}$.

PRO-

PROPOSITIO 95.

Problema.

856. Si corpus super superficie motum a quocunque potentiis sollicitetur; definire vires normales prementem scilicet et deflectentem, atque vim tangentialem ex resolutione omnium ortam.

Solutio.

Quaecunque fuerint potentiae sollicitantes eae ad tres reduci possunt, quarum directiones sint secundum tres coordinatas x, y, z . Sit nunc vis corpus in M secundum parallelam abscissae PA trahens = E; vis secundum parallelam ipsi QP trahens = F, et vis secundum MQ trahens = G. Singulae ergo hae vires resoluendae sunt in ternas, normalem prementem scilicet, normalem deflectentem et tangentialem. Quia autem hae tres directiones sunt inter se normales, ex quaque ipsarum E, F et G vires normales et tangentialis prodibunt, si illae ducantur in cosinum anguli, quem illarum virium directiones cum istis constituunt. Incipiamus a vi tangentiali, cuius directio est MT existente $AF = \frac{zdx}{dz} - x$ et $FT = y - \frac{zdy}{dz}$, atque $QT = \frac{z\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}{dz}$ et $MT = \frac{z\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}{dz}$. Vnde erit cosinus anguli QMT, quem directio vis G cum vi tangentiali constituit = $\frac{QM}{MT} = \frac{dz}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$. In quem si ducatur vis G, prodibit vis tangentialis ex ea orta $\frac{Gdz}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$. Cosinus vero anguli, quem MT

Tab. XVII,
Fig. 2.

478 CAPUT QUARTUM DE MOTU PUNCTI

constituit cum directione vis F, quae est ipsi QP parallela est = cos. PQT. $\int QMT = \frac{PQ - FT}{QT} \cdot \frac{QT}{MT} = \frac{dy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$. Vis ergo tangentialis ex F orta est

= $\frac{Fdy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$. Cosinus porro anguli, quem directio vis E constituit cum MT est = $\frac{dx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$

ideoque vis tangentialis ex vi E orta = $\frac{Edx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$

Tab. XVII.
Fig. I.

Iam consideretur vis premens, cuius directio est MN, existente AH = x + Pz et HN = -y - Qz, seu PH = Pz et QP + HN = -Qz. Ex quo erit QN = zV(P² + Q²) et MN = zV(1 + P² + Q²). Anguli ergo, quem directio potentiae G cum MN constituit, cosinus est $\frac{MQ}{NM} = \frac{1}{\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}$, ideoque vis premens ex G

orta = $\frac{G}{\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}$. Porro anguli, quem directio vis F, quae est parallela ipsi QP, cum MN constituit, cosinus est = cos. PQN. $\int QMN = \frac{(PQ + HN)QN}{QN \cdot MN} = -\frac{Q}{\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}$. Ergo vis premens ex vi F orta est

Tab. XVII.
Tab. 4.

= $-\frac{FQ}{\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}$. Atque simili modo vis premens ex vi E orta est = $-\frac{EP}{\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}$. Denique cum vis defle-

ctentis directio sit MG, atque PE = $\frac{z(dy + Qdz)}{Qax - Pdy}$ et QP + EG = $\frac{z(dx + Pdz)}{Qdx - Pdy}$; erit anguli, quem MG cum directione vis G constituit, cosinus

= $\frac{Qdx - Pdy}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}$; quare vis defle-

ctens ex vi G orta est = $\frac{G(Qdx - Pdy)}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}$

Porro anguli, quem MG cum directione vis F

con-

constituit, cosinus est $= \frac{PQ + EG}{MG} \frac{dx + Pdz}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + P^2 + Q^2}}$; quamobrem vis defle-

ctens ex vi F orta est $= \frac{F(dx + Pdz)}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + P^2 + Q^2}}$

Denique anguli, quem directio vis E cum MG constituit, cosinus est $= \frac{-PE}{MG} \frac{-dy - Qdz}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + P^2 + Q^2}}$. Vis ergo deflectens

ex vi E orta est $= \frac{-E dy + Qdz}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + P^2 + Q^2}}$.

Cum autem ante vim tangentialem vocauerimus T; vim prementem = M et vim deflectentem = N: ad has vires tres propositas E, F, et G reduxi-
mus; erit namque $T = \frac{Edx + Fdy + Gdz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}$ et $M = \frac{-EP - FQ + G}{\sqrt{1 + P^2 + Q^2}}$
atque $N = \frac{-E(dy + Qdz) + F(dx + Pdz) + G(Qdx - Pdy)}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + P^2 + Q^2}}$.

Q. E. I.

Corollarium I.

857. Si igitur corpus a tribus potentiis E, F et G sollicitetur; erit, posito v pro altitudine debita celeritati in M; $dv = -Edx - Fdy - Gdz$ (849), si loco T ponatur vis tangentialis ex resolutione potentiarum E, F et G orta.

Co-

Corollarium 2.

858. Si praeterea corpus in medio resistente moueatur, atque resistentia in M fuerit $=R$; erit $dv = -E dx - F dy - G dz - R \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$.

Corollarium 3.

859. Si in aequatione §. 851. inuenta, in qua effectus vis deflectentis N est determinatus, loco N substituatur vis deflectens ex resolutione virium E, F et G orta, prodibit $\frac{2vddz(Pdy - Qdx) - 2vddy(dx + Pd z)}{dx^2 + dy^2 + dz^2} = -E(dy + Qdz) + F(dx + Pd z) - G(Pdy - Qdx)$.

Corollarium 4.

860. Si ergo ex istis duabus aequationibus confletur vna eliminanda v ; prodibit aequatio, quae cum locali ad superficiem $dz = Pdx + Qdy$ coniuncta determinabit viam a corpore in superficie descriptam.

Corollarium 5.

861. Vis autem, qua superficies secundum normalem in eam premitur, tam ex vi normali premente M , quam ex vi centrifuga orta est $= \frac{(G - EP - FQ)(dx^2 + dy^2 + dz^2) + 2v(dPdx + dQdy)}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}} (845)$, substituto loco M valore inuento.

Corollarium 6.

862. Est vero ex aequatione coroll. 3. inuenta $2v = \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)(E(dy + Qdz) - F(dx + Pd z) + G(Pdy - Qdx))}{-ddz(Pdy - Qdx) + ddy(dx + Pd z)}$

quo

quo valore ibi substituto prodibit tota pressio =

$$\frac{(Gdxddy - Fdxdz + Edyddz - Edzddy)\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}{ddz(Pdy - Qdx) - ddy(dx + Pd z)}.$$

Scholion.

863. Quia tres potentiae E, F, G directiones habent inuicem normales, erit potentia iis aequivalens $= \sqrt{(E^2 + F^2 + G^2)}$. His vero tribus viribus aequivalere inuenimus tres M, N et T, quarum directiones sunt quoque inuicem normales; quare istis tribus aequivalens vis erit $= \sqrt{(M^2 + N^2 + T^2)}$. Quamobrem si loco M, N et T substituuntur valores inuenti ex E, F et G, prodire debet quoque $\sqrt{(E^2 + F^2 + G^2)}$; id quod calculo instituto re ipsa se habere deprehendetur. Inseruit autem hoc instar probationis, vtrum calculus prolixus, quo haec resolutio est absoluta, recte fuerit institutus, an vero secus. Hac vero probatione instituta reperientur se hae formulae recte habere.

PROPOSITIO 96.

Problema.

864. In hypothesei gravitatis uniformis et deorsum directae g, determinare lineam, quam corpus super quacunque superficie proiectum in vacuo describit.

Solutio.

Sit APQ planum horizontale, et M punctum Tab. XVII.
tam in superficie data, quam in linea a corpore Fig. 2.

Tom. II.

Ppp

de-

descripta. Erit ergo MQ verticalis et propterea directio vis grauitatis g . Positis $AP=x$, $PQ=y$, et $QM=z$, atque aequatione superficiei naturam exprimente $dz=Pdx+Qdy$; fit celeritas in M , qua elementum Mm percurritur, debita altitudini v . Cum igitur problema hoc sit casus praecedentis; fit enim $G=g$, $E=0$ et $F=0$; habebuntur hae duae aequationes $dv=-g dz$ (357.), atque $2vddz(Pdy-Qdx)-2vddy(dx+Pdz)+g(Pdy-Qdx)(dx^2+dy^2+dz^2)=0$. Sit porro altitudo debita celeritati, quam corpus habiturum esset, si in planum horizontale APQ perueniret, $=b$; erit $v=b-gz$. Per alteram vero aequationem est $2v$

$$= \frac{g(Pdy-Qdx)(dx^2+dy^2+dz^2)}{ddy(dx+Pdz)-ddz(Pdy-Qdx)}.$$
 Vnde erit $\frac{dv}{2v} = \frac{dzddz(Pdy-Qdx)-dzddy(dx+Pdz)}{(Pdy-Qdx)(dx^2+dy^2+dz^2)}.$ Quae aequatio ope aequationis $dz=Pdx+Qdy$ transmutatur in hanc

$$\frac{dv}{2v} = \frac{dyddy+gzddz}{dx^2+dy^2+dz^2} - \frac{Pddy}{Pdy-Qdx};$$
 quae integrata dat $lv = l(dx^2+dy^2+dz^2) - 2\int \frac{Pddy}{Pdy-Qdx}.$ In quouis ergo casu speciali inuestigari debet, an $\frac{Pddy}{Pdy-Qdx}$ integrationem admittat. Quod si contigerit, habebitur v in differentialibus primi gradus; atque cum sit $v=b-gz$, orietur aequatio differentialis primi gradus curuae descriptae naturam exprimens. Pressio vero in superficiem secundum normalem erit $= \frac{gddy\sqrt{1+P^2+Q^2}}{ddz(Pdy-Qdx)-ddy(dx+Pdz)},$ quae sublatiis differentialibus secundi gradus abit in hanc $\frac{-g}{\sqrt{1+P^2+Q^2}} \frac{2(b-gz)(dPdx+dQdy)}{(dx^2+dy^2+dz^2)\sqrt{1+P^2+Q^2}}.$ Q. E. I.

Corollarium I.

865. Celeritas ergo corporis in hypothesi grauitatis vniformis g et deorsum directae in superficie quacunque moti ex sola altitudine cognosci potest, omnino vt si corpus in eodem plano moueretur.

Corollarium 2.

866. Si tempusculum, quo elementum Mm absoluitur, ponatur dt , erit $dt = \frac{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}{\sqrt{v}}$. Per aequationem ergo inuentam erit $ldt = \int \frac{Pddy}{Pdy-Qdx}$; atque $\frac{ddt}{dt} = \frac{Pddy}{Pdy-Qdx}$.

Corollarium 3.

867. Ex inuentis aequationibus reperietur $ddy = \frac{g(Pdy-Qdx)(dx^2+dy^2+dz^2)}{2dx(b-gz)(1+P^2+Q^2)} + \frac{(dPdx+dQdy)(Pdy-Qdx)}{(1+P^2+Q^2)dx}$ atque $ddz = \frac{gQ(Pdy-Qdx)(dx^2+dy^2+dz^2)}{2dx(b-gz)(1+P^2+Q^2)} + \frac{(dPdx+dQdy)(dx+Pdz)}{(1+P^2+Q^2)dx}$. Hinc erit $dzddy-dyddz = \frac{gP(Pdy-Qdx)(dx^2+dy^2+dz^2)}{2(b-gz)(1+P^2+Q^2)} - \frac{(dPdx+dQdy)(dy+Qdz)}{1+P^2+Q^2}$. Curuae vero descriptae radius osculi erit $= \frac{2(dx^2+dy^2+dz^2)(b-gz)\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}{\sqrt{(g^2(Pdy-Qdx)^2(dx^2+dy^2+dz^2)+4(b-gz)^2(dPdx+dQdy)^2)}}$

Scholion.

868. Harum formularum vsum in casibus particularibus, quibus certa quaedam species superficierum consideratur, in sequentibus problematis fusius exponemus, quibus singularium superficierum exempla adiungemus.

PROPOSITIO 97.

Problema.

Tab. XVIII.
Fig. I.

869. *In hypothefi grauitatis uniformis deorfum tendentis g, determinare motum corporis in superficie cuiuscunque cylindri, cuius axis fit verticalis.*

Solutio.

Quia axis cylindri ponitur verticalis, erunt omnes sectiones horizontales inter fe aequales; fit igitur ABQC basis cylindri, in cuius superficie mouetur corpus. Ponatur $AP=x$, $PQ=y$, fitque z corporis altitudo super puncto Q in superficie cylindri. Natura ergo huius superficiei cylindricae hac exprimetur aequatione $0 = Pdx + Qdy$ seu $Qdy = -Pdx$. Haec autem aequatio orietur ex generali $dz = Pdx + Qdy$, si P et Q fiant quantitates infinite magnae, seu euanescente coefficiente ipsius dz , si quem assumissemus. Quamobrem in aequationibus ante inuentis P et Q quasi quantitates infinite magnae considerari debent; etiam si sint finitae magnitudinis. Erunt autem P et Q functiones ipsarum x et y tantum, neque in eis inerit z . His ergo in calculum deductis, habebitur $v = b - gz$; atque $2v = \frac{g(Pdy - Qdx)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{Pdzl dy - Pdy d dz + Qdxdz} = \frac{g(dx^2 + dy^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{dydzl dy - dy^2 d dz - dx^2 d dz}$ propter analogiam $P:Q = dy:-dx$. At posterior aequatio logarithmica erit $lv = l(dx^2 + dy^2 + dz^2) - 2 \int \frac{dyddy}{dx^2 + dy^2} = l(dx^2 + dy^2 + dz^2)$

$-l(dx^2 + dy^2) + lc$. Vnde fit $\frac{v}{c} = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dx^2 + dy^2} =$
 $\frac{b-gz}{c} = 1 + \frac{dz^2}{dx^2 + dy^2}$ Hinc oritur $(b-c-gz)(dx^2$
 $+ dy^2) = c dz^2$ feu $V(dx^2 + dy^2) = \frac{dz\sqrt{c}}{\sqrt{(b-c-gz)}}$,
 cuius integralis est $\int V(dx^2 + dy^2) = -\frac{\sqrt{c(b-c-gz)}}{g}$,
 vbi $\int V(dx^2 + dy^2)$ denotat arcum basis BQC
 motu horizontali percursum. Si tempusculum quo
 elementum Mm absolvitur ponatur dt , erit $\frac{ddt}{dt} =$
 $\frac{dyddy}{dx^2 + dy^2}$ atque $adt = V(dx^2 + dy^2)$, porroque at
 $= \int V(dx^2 + dy^2)$. Quare tempora erunt pro-
 portionalia arcubus in basi respondentibus. Aequa-
 tio autem $\int V(dx^2 + dy^2) = -\frac{\sqrt{c(b-c-gz)}}{g}$, dabit
 aequationem pro curua in superficie cylindrica de-
 scripta, si haec superficies in planum concipiatur
 explicata: denotabit enim tum $\int V(dx^2 + dy^2)$ ab-
 scissam in axe horizontali et z applicatam verticalem.
 Projectionem vero curuae descriptae in plano verti-
 cali planum horizontale iuxta AC secante habe-
 bimus, si ope aequationis $Pdx + Qdy = 0$ elimi-
 netur y , vt prodeat aequatio inter x et z , quae
 erunt coordinatae huius projectionis. Scilicet ob
 $dy = -\frac{Pdx}{Q}$ erit $V(dx^2 + dy^2) = \frac{dx}{Q} V(P^2 + Q^2)$, ideo-
 que $\int \frac{dx\sqrt{P^2 + Q^2}}{Q} = \frac{\sqrt{c(b-c-gz)}}{g}$, vbi in P et Q loco y
 eius valor in x debet substitui. Pressio vero quam
 superficies sustinebit a sola vi centrifuga orietur,
 propter potentiam g in ipsa superficie sitam, erit-
 que $= \frac{2(b-gz)(dPdx + dQdy)}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(P^2 + Q^2)}}$, qua vi corpus ab axe

cylindri recedere conabitur, si haec expressio fuerit affirmatiua. Q. E. I.

Corollarium I.

870. Curua ergo, quam corpus in superficie cylindri describit, si superficies in planum explicetur, abibit in parabolam, ipsam scilicet proectoriam, quam corpus proiectum in plano verticali describeret.

Corollarium 2.

871. Si motus corporis super superficie cylindrica compositus consideretur ex motu verticali, quod vel sursum vel deorsum progreditur, et ex horizontali; erit motus horizontalis aequalis, quia tempora t proportionalia sunt $\int \sqrt{dx^2 + dy^2}$ i. e. arcubus horizontali motu percurfis. Motus vero verticalis erit vel aequaliter acceleratus vel retardatus.

Corollarium 3.

872. Si ergo motus horizontalis euanescit, corpus recta vel ascendet vel descendet, omnino ac si libere ascenderet vel descenderet. Hicque casus prodit, si fuerit $c=0$, quo $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ euanescit.

Ex.

Exemplum.

873. Sit basis cylindri circulus cuius, quadrans sit BQC et radius AB=a; erit $x^2 + y^2 = a^2$ et $x dx + y dy = 0$. Fiet ergo P=x et Q=y= $\sqrt{a^2 - x^2}$. Proiectio vero lineae in superficie cylindrica hac descriptae in plano verticali ex AC erecto exprimeretur aequatione $\int \frac{a dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\sqrt{c(b-c-gz)}}{g}$. Si ergo fuerit $c=0$, fiet $dx=0$, atque $x=$ constanti; quare hoc casu proiectio erit linea recta. Curua vero, quae est proiectio pro quocunque ipsius c valore, ope rectificationis circuli construetur. Pressio autem, quam superficies cylindri sustinet est $= \frac{2(b-gz)(dx^2+dy^2)}{(dx^2+dy^2+dz^2)a} = \frac{2c}{a}$, propter aequationem $\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dx^2+dy^2} = \frac{b-gz}{c}$. Quare pressio vbique erit constantis et ipsi c proportionalis.

Corollarium 4.

874. Propter eandem aequationem erit generaliter pressio, quam cylinder quicunque sustinet $= \frac{2c(dPdx+dQdy)}{(dx^2+dy^2)V(P^2+Q^2)} = \frac{2Q^2c(dPdx+dQdy)}{dx^2(P^2+Q^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2Qc(QdP-PdQ)}{dx(P^2+Q^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Scholion.

875. Non solum autem ope resolutionis motus super superficie cylindrica erecta corporis motus

tus facile potest determinari; sed etiam si cylindri axis fuerit horizontalis eadem facilitate motus corporis cognoscetur. Namque si corpus non habeat motum horizontalem iuxta axem cylindri corpus perpetuo in eadem cylindri sectione permanebit, in eaque mouebitur tanquam super linea data. Sin vero accedat motus horizontalis, is perpetuo idem manebit, neque alterum motum perturbabit; atque his motibus coniungendis verus corporis motus facile cognoscetur.

PROPOSITIO 98.

Problema.

Tab. XVIII.

Fig. 2.

876. *Si corpus moueatur in superficie solidi rotundi, cuius axis est verticalis AL, in vacuo a gravitate uniformi g sollicitatum; determinare motum corporis super huiusmodi superficie.*

Solutio.

Generetur solidum rotundum conuersione curvae AM circa axem verticalem AL, erunt omnes eius sectiones horizontales circuli, quorum radii sunt applicatae curvae AM. Aequatio ergo naturam huius superficie exprimens erit $dz = \frac{x dx + y dy}{Z}$ denotante Z functionem quamcunque ipsius z; erit enim $2 \int Z dz = x^2 + y^2 = LM^2$. Si ergo detur aequatio pro curua AM, inter $AL = z$ et $LM = \sqrt{2 \int Z dz}$; dabitur quoque Z. His praemissis erit itaque

itaque $P = \frac{x}{z}$ et $Q = \frac{y}{z}$; qui valores si substituantur, habebuntur duae sequentes aequationes, ex quibus tam curua descripta quam motus super ea cognoscetur, $v = b - gz$ atque $lv = l(dx^2 + dy^2 + dz^2) - 2 \int \frac{xddy}{xy - ydx} = l(dx^2 + dy^2 + dz^2) - 2l(xy - ydx) + \text{const.}$ Quare erit $v = \frac{c^3(dx^2 + dy^2 + dz^2) - (xay - ydx)^2}{(xay - ydx)^2} = b - gz$. Ponatur $x^2 + y^2 = u^2$, erit u functio quaedam ipsius z , nempe $u^2 = 2 \int Z dz$; atque superior aequatio abibit in hanc $V(dx^2 + dy^2) = \frac{\sqrt{c^3 dz^2 + u^2 du^2(b - gz)}}{\sqrt{u^2(b - gz) - c^3}}$. Projectio vero in plano horizontali per aequationem inter x et y habebitur, si ex aequatione $x^2 + y^2 = 2 \int Z dz$ valor ipsius z in x et y substituatur; huiusque projectionis arcus est $\int V(dx^2 + dy^2)$. In plano autem verticali habebitur projectio eliminanda y ; quo facto prodit aequatio $\frac{u dx - x du}{c \sqrt{c(u^2 - x^2)}} = \sqrt{\frac{du^2 + dz^2}{u^2(b - gz) - c^3}}$, quae aequatio si per u diuidatur constructionem admittit. Pressio vero quam superficies sustinet axem versus erit $= \frac{-gZ}{\sqrt{(x^2 + y^2 + Z^2)}} - \frac{2c^3 Z(dx^2 + dy^2) + 2c^3 dZ(xdx + ydy)}{Z(xdy - ydx)^2 \sqrt{(x^2 + y^2 + Z^2)}}$. Q. E. I.

Corollarium I.

§77. Si tempusculum, quo elementum Mm absoluitur ponatur dt ; erit $\frac{ddt}{dt} = \frac{xddy}{xay - ydx}$, cuius integralis est $adt = xdy - ydx$. Ipsum ergo tempus erit vt $xy - 2 \int y dx$, denotante $\int y dx$ aream projectionis in plano horizontali.

Corollarium 2.

378. Si corpus in proiectione in plano horizontali moueri concipiatur, erit celeritas eius in Q debita altitudini $\frac{c^3(dx^2+dy^2)}{(ydx-xy^2)^2}$; ex quo motu in proiectione ipse motus in superficie inuenietur.

Corollarium 3.

Tab. XVIII.
Fig. 3.

379. Sit igitur BQC proiectio curvae in plano horizontali, in qua moueatur corpus ita vt motus eius respondeat motui corporis in superficie ipsa; erit tempus quo arcus BQ absoluitur vt $\frac{xy}{2} - \int y dx$ seu negative vt $\int y dx - \frac{xy}{2}$ i. e. vt area BAQ ducto radio AQ.

Corollarium 4.

380. Areae autem BAQ elementum est $\frac{ydx-xy^2}{2}$. Ducta ergo tangente QT et demisso in eam ex A perpendiculari AT erit $AT = \frac{ydx-xy^2}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$. Quare altitudo celeritati in Q debita est $= \frac{c^3}{AT^2} = \frac{c^3}{p^2}$, posito $AT = p$.

Corollarium 5.

381. Corpus ergo in proiectione motum perinde in ea mouebitur, ac si libere moueretur attractum vi quadam centripeta ad centrum A.

Corollarium 6.

382. Respondeat punctum B motus in superficie facti initio, et cum detur directio prima

ma motus in superficie, dabitur perpendicularum in tangentem in B. Sit ergo $AB=f$, et perpendicularum in tangentem $=b$; erit altitudo celeritati in B debita $=\frac{c^2}{b^2}$.

Corollarium 7.

883. Vis ergo centripeta versus A tendens, quae faciet, vt corpus in projectione BQC libere moueatur, erit $=\frac{2c^3dp}{p^3du}$, posito u pro $\sqrt{x^2+y^2}$. Aequatio vero inter u et z exprimet naturam curuae, cuius conuersione genita est superficies proposita, ideoque datur.

Corollarium 8.

884. Est porro $\sqrt{dx^2+dy^2}=\frac{udu}{\sqrt{(u^2-p^2)}}$ et $ydx - xdy = \frac{pudu}{\sqrt{(u^2-p^2)}}$. Hi valores si in aequatione inuenta substituantur, dabunt $c^3u^2du^2 + c^3u^2dz^2 - c^5p^2dz^2 = (b-gz)p^2u^2du^2$, seu $p^2 = \frac{c^3u^2(du^2+dz^2)}{c^5dz^2+u^2du^2(b-gz)}$.

Corollarium 9.

885. Huius ergo quantitatis $-\frac{c^3dz^2-u^2du^2(b-gz)}{u^2(du^2+dz^2)}$ differentiale per du diuisum dabit vim centripetam in A requisitam, vt corpus in projectione BQC moueatur libere, motu respondente motui corporis in superficie.

Corollarium 10.

886. Si $c=0$, fiet quoque $p=0$. Quare hoc casu projectio in plano horizontali erit recta per

Qqq 2

A

492 CAPUT QVARTVM DE MOTV PVNCTI

A transiens. Super qua corpus ad A accedens ita attrahetur vt sit vis centripeta $\frac{1}{du} d. \frac{-du^2(b-gz)}{(du^2+az^2)}$.

Corollarium II.

887. Si corporis directio prima fuerit horizontalis tangens in B ad AB erit normalis; ideoque $b=f$. Hoc vero casu celeritas in superficie aequalis erit celeritati in proiectione; quare si fuerit i valor ipsius z , si est $u=f$; erit $b-gi=\frac{c^3}{fz}$.

Corollarium I2.

888. Si praeterea vis centripeta in B aequalis fuerit vi centrifugae, curua BQC erit circulus, et propterea ipsa quoque curua in superficie descripta, atque motus tam in superficie quam in proiectione aequabilis. Sit vbi est $u=f$ et $z=i$, $dz=mdu$; erit ob $p=f$, et $u=f$ et $z=y$ in casu, quo circulus describitur, $2c^3=gmf^3$.

Corollarium I3.

889 Si ponatur $\pi:1$ vt peripheria ad diametrum erit circuli nostri peripheria $=2\pi f$, quae diuisa per celeritatem $\sqrt{\frac{c^3}{f^2}}$ i. e. $\sqrt{\frac{gm}{2}}$, dat tempus vnus periodi in circulo, quod ergo erit $=\frac{2\pi\sqrt{2f}}{\sqrt{gm}}$. Pendulum ergo integras oscillationes his periodis isochronas absoluens erit $=\frac{f}{m}$ in eadem grauitatis hypothefi.

Corollarium I4.

890. In superficie ergo, quae generatur conuersione curuae AM circa axem verticalem AL,
Co-

corpus proiectum circulum radii LM describere potest eodem tempore, quo pendulum longitudinis = subnormali LS integram oscillationem absolvit.

Corollarium 15.

891. Si ergo curua AM fuerit parabola omnes periodi per circulos horizontales in conoide parabolica aequalibus absolventur temporibus; atque penduli, iisdem temporibus oscillationes integras peragentis longitudo aequabitur dimidia parti parametri.

Scholion I.

892. Quaecunque assumatur curua AM; si vis centripeta motus in proiectione versus A ex data formula definiatur, eaque aequalis ponatur vi centrifugae, atque coniungatur cum aequatione $b-gz = \frac{c^2}{f^2}$; prodibit $2c^2 = gmf^2$; hoc enim casu tam proiectio erit circulus, quam ipsa curua in superficie descripta. Quo vero hoc melius appareat ponatur $dz = q du$, provenietque vis centripeta $= \frac{2qdg(bu^2 - gzu^2 - c^3)}{u^2 du(1+q^2)^2} + \frac{2c^3q^2 + gqu^3}{u^3(1+q^2)}$. Iam ponatur $u=f$; $z=i$; et $bf^2 = gf^2i + c^3$; atque $q=m$; erit vis centripeta $= \frac{2c^3m^2 + gmf^3}{f^3(1+m^2)}$, aequalis posita vi centrifugae $\frac{2c^3}{f^3}$ dat $2c^3 = gmf^3$.

Exemplum.

893. Sit superficies conica circularis seu AM Tab. XVIII. linea recta vtcunque inclinata ad axem AL; quare Fig. 2. et 3.

Q993

erit

494. CAPVT QVARTVM DE MOTV PUNCT

erit $z=mu$ et $dz=mdu$. Vis ergo centripeta ad A tendens, quae faciet vt corpus libere in proiectione BQC moueatur, erit $=\frac{2c^3m^2+gm u^3}{u^3(1+m^2)}$. Haec ergo vis erit composita ex vi constante et vi reciproce cubis distantiarum a centro A proportionali. Si $c=0$, tum proiectio erit linea recta per A transiens, atque vis centripeta erit $=\frac{gm}{1+m^2}$ siue constans. Corpus ergo motu aequabiliter accelerato ad A accedet, motus vero in superficie conica congruet cum descensu vel ascensu super recta inclinata critque pariter aequabiliter acceleratus. Sin autem proiectio fuerit curuilinea et tangens in B normalis ad AB, erit $i=mf$, atque $b-mf=\frac{c^3}{f^2}$, posito $AB=f$. Erit ergo hoc casu $b=\frac{c^3+mf^3}{f^2}$ atque si corpus in circulo horizontali reuoluitur, erit insuper $2c^3=gmf^3$. Quo ergo hoc accadat debet esse celeritas corporis debita altitudini $\frac{c^3}{f^2}=\frac{gm f}{2}$. Atque periodi in hoc circulo iisdem absoluentur temporibus, quibus penduli longitudinis $\frac{f}{m}$ integrae oscillationes. At si non fuerit $2c^3=gmf^3$, verum tamen $b=\frac{c^3+mf^3}{f^2}$, curua BQC habebit quidem in B tangentem ad AB normalem, sed proiectio haec non erit circulus. At si $2c^3$ proxime aequale fuerit ipsi $gm f^3$, curua quoque a circulo non multum discrepabit; habebit autem absides varias, in quibus tangens ad radium est perpendicularis. Harum absidum vero positio per prop. 91 Libr. praeced. determinatur. Quoniam enim vis centripeta est $\frac{2c^3m^2+gm u^3}{u^3(1+m^2)}$, si haec comparetur cum illa vi centripeta $\frac{P}{y^3}$ ob $y=u$, erit $P=$

$2c^3$

$\frac{2c^3m^2+gm^3}{1+n^2}$, atque $\frac{dP}{P} = \frac{3gm^2du}{2c^3m^2+gm^3}$ atque $\frac{Pdy}{y dP} = \frac{2mc^3+gu^3}{3gu^3}$; ideoque. posito $u=f$, distabit quoque linea absidum a praecedente abside angulo $180\sqrt{\frac{2mc^3+gf^3}{3gf^3}}$ graduum. Quoniam autem proxime est $2c^3=gmf^3$, erit angulus inter duas absides interceptus $=180\sqrt{\frac{m^2+1}{3}}$ graduum. Cum ergo $\frac{m^2+1}{3}$ semper sit maius quam $\frac{1}{3}$ erit angulus inter duas absides interceptus maior quam 103 grad. $55'$.

Scholion 2.

894. Exemplum superficiei sphaericae hic non adiungo, sed motus super ea determinationi sequentem propositionem destino, quia haec materia particulari pertractatione est digna. Si enim pendulum non secundum planum verticale impellitur, tum corpus in superficie sphaerae movebitur, et vel circulos describet vel alias curvas non parum elegantes, quemadmodum cuius experimentum instituenti innotescet. Casus quidem, quo pendulum circulos absoluit, a Cel. Iob. Bernoullio in Act. Lips. A. 1719 iam est expositus sub titulo motus turbinarii. At si curva non fuerit circulus, nemo quantum scio, hunc penduli motum vel consideravit vel determinavit.

DEFINITIO 6.

895. Motus turbinarius vocatur penduli non in plano verticali impulsus motus. Hoc ergo casu pendulum non in eodem plano verticali mouetur, sed cur-
uam

uam quandam describet in superficie sphaerica, cuius radius est ipsa pendulo longitudo, sitam.

PROPOSITIO 99.

Probl. ma.

Tab. XVIII.

Fig. 2, et 3. 896. Penduli ad motum turbinatorium incitati, determinare motum et lineam curuam, quam in superficie sphaerica describit.

Solutio.

Quia corpus motum pendulo est alligatum in superficie sphaerica mouebitur, cuius radius est longitudo penduli. Sit haec longitudo seu radius sphaerae $=a$, erit $z=a-\sqrt{a^2-u^2}$ ex natura circu-

li A M. Erit ergo $q=\frac{u}{\sqrt{a^2-u^2}}$ et $dq=\frac{a^2 du}{(a^2-u^2)^{\frac{3}{2}}}$

ideoque $\frac{2q dq}{u^2 du}=\frac{2a^2}{u(a^2-u^2)^2}$. Ex his inuenitur vis centripeta ad A tendens, quae facit, vt corpus in projectione BQC libere moueatur, $=\frac{2bu-2gau+3gu\sqrt{a^2-u^2}}{a^2}$.

Atque pro curua BQC haec habebitur aequatio $p^2=$

$\frac{a^2 c^3}{c^3+(b-ga)(a^2-u^2)+g(a^2-u^2)^{\frac{3}{2}}}$, quae ad proiecti-

onem BQC construendam sufficit. Sit tangens in B perpendicularis ad radium AB, id quod semper alicubi contingere debet, nisi projectio sit linea recta, quia vis centripeta decrescit, decrescente u .

Ponatur $AB=f$; erit $i=a-\sqrt{a^2-f^2}$, atque $b-ga$
 $+g\sqrt{a^2-f^2}$

$\sqrt{a^2 - f^2} = \frac{c^3}{2f^2}$. Si praeterea fuerit $2c^3 = \frac{gf^4}{\sqrt{a^2 - f^2}}$, corpus in circulo reuoluetur, cuius radius est f , celeritate debita altitudini $\frac{c^3}{f^2} = \frac{gf^2}{2\sqrt{a^2 - f^2}}$. Penduli vero integras oscillationes iisdem temporibus absoluentis longitudo est $= \sqrt{a^2 - f^2}$. Sin autem non fuerit $2c^3 = \frac{gf^4}{\sqrt{a^2 - f^2}}$, differentia vero sit valde exigua; curua BQC a circulo non multum discrepabit. Cuius curuae, quo positiones absidum inueniantur, erit iuxta prop. 91. Libri praeced. $y = u$ et $P = \frac{u^4}{a^2}(2b - 2ga + 3g\sqrt{a^2 - u^2})$. Hinc est $\frac{dP}{P} = \frac{4du}{u} - \frac{3gu du}{(2b - 2ga)\sqrt{a^2 - u^2} + 3g(a^2 - u^2)}$, atque $\frac{y dP}{P dy} = 4 - \frac{3gu^2}{(2b - 2ga)\sqrt{a^2 - u^2} + 3g(a^2 - u^2)}$. Quia curua fere est circulus, ponatur $u = f$, atque $2b - 2ga = \frac{gf^2}{\sqrt{a^2 - f^2}} - 2g\sqrt{a^2 - f^2} = \frac{3gf^2 - 2ga^2}{\sqrt{a^2 - f^2}}$, quo facto prodibit $\frac{y dP}{P dy} = 4 - \frac{3f^2}{a^2}$. Hinc sequitur interuallum inter duas absides esse angulum $\frac{180a}{\sqrt{4a^2 - 3f^2}}$ graduum. Tanto scilicet angulo locus, in quo pendulum ab axe maxime distat, diffitus est a loco, in quo pendulum axi est proximum. Q. E. I.

Corollarium I.

897. Quo igitur pendulum AB = a motu turbine binatorio circulum BDCE describat, oportet vt eius celeritas debita sit altitudini $\frac{g \cdot BO^2}{2 \cdot AO}$.

Tab. XVIII
Fig. 4.

Corollarium 2.

898. Longitudo vero penduli, quod oscillationes minimas integras eodem tempore absoluit,

Tom. II.

Rrr

uit,

uit, quo periodus in circulo BDCR conficiatur,
est $= AO$.

Corollarium 3.

899. Tempora ergo, quibus diuersi circuli motu turbinatorio a pendulo AB percurrantur, sunt in subduplicata ratione altitudinum AO.

Corollarium 4.

900. Quo igitur pendulum longitudinis a circum horizontalem maximum conficiat, cuius radius est a , celeritas infinite magna requiritur; atque quaeque periodus tempore infinite paruo absoluitur.

Corollarium 5.

901. Si radius circuli BO fuerit valde parvus respectu penduli $AB=a$, congruent periodi motus turbinatorii cum oscillationibus integris eiusdem penduli.

Corollarium 6.

902. Si curua descripta non fuerit circulus, sed figura proxima, atque BO valde paruum; erit angulus inter duas absides 90° , seu rectus.

Corollarium 7.

903. Hoc vero casu curua a corpore descripta erit ellipsis centrum habens in A. Quod ex

vi centripeta colligitur, quae tum ipsis distantis fit proportionalis.

Corollarium 8.

904. Quo maior autem est radius BO; eo maior quoque erit angulus inter duas absides interceptus. Atque si fiat $BO = BA$, erit hic angulus 180° .

Corollarium 9.

905. Si angulus BAO fuerit 30° . grad. erit $BO = \frac{1}{2} BA$ seu $f = \frac{1}{2} a$. Angulus ergo inter duas absides interceptus erit $\frac{360}{\sqrt{13}}$ graduum seu $99^\circ, 50'$. Projectionis ergo in plano horizontali haec erit figura *abdefgbik* etc. in qua absides summae sunt in *a, c, e, g, i*, et imae in *b, d, f, b, k*.

Fig. 5.

Corollarium 10.

906. In hac igitur figura linea absidum mo-
vetur in consequentia; singulis enim periodis cir-
citer 39° progredietur in consequentia.

Corollarium II.

907. Sin autem ille angulus BAO minor fuerit quam 30° graduum; tum minor etiam erit absidum progressio. Quae quo pro quouis angulo BAO statim cognoscatur, fractionem $\frac{a}{\sqrt{(4g^2 - 3f^2)}}$

Rrr 2

in

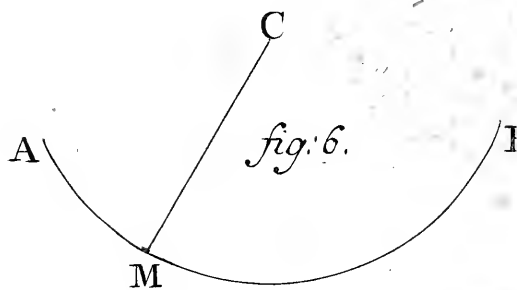
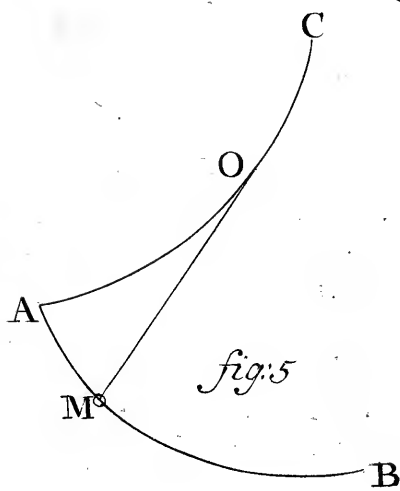
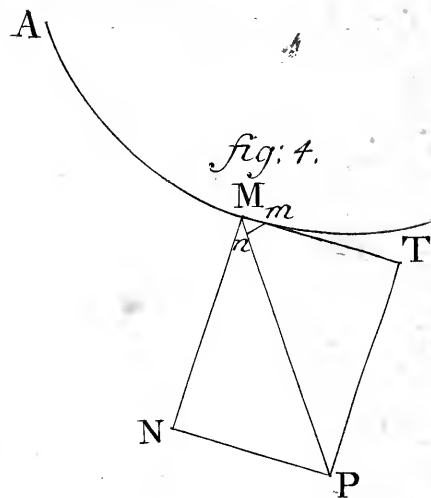
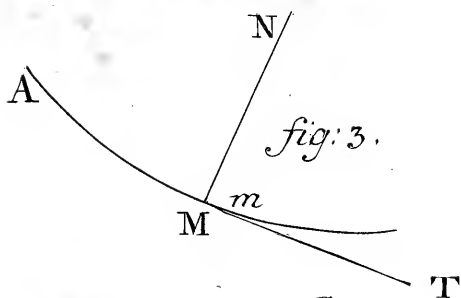
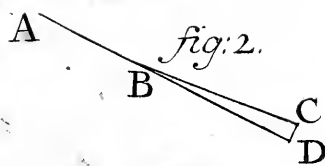
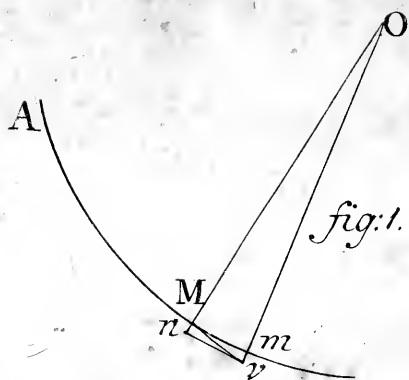
500 CAPVT QVARTVM DE MOTV PVNCTI

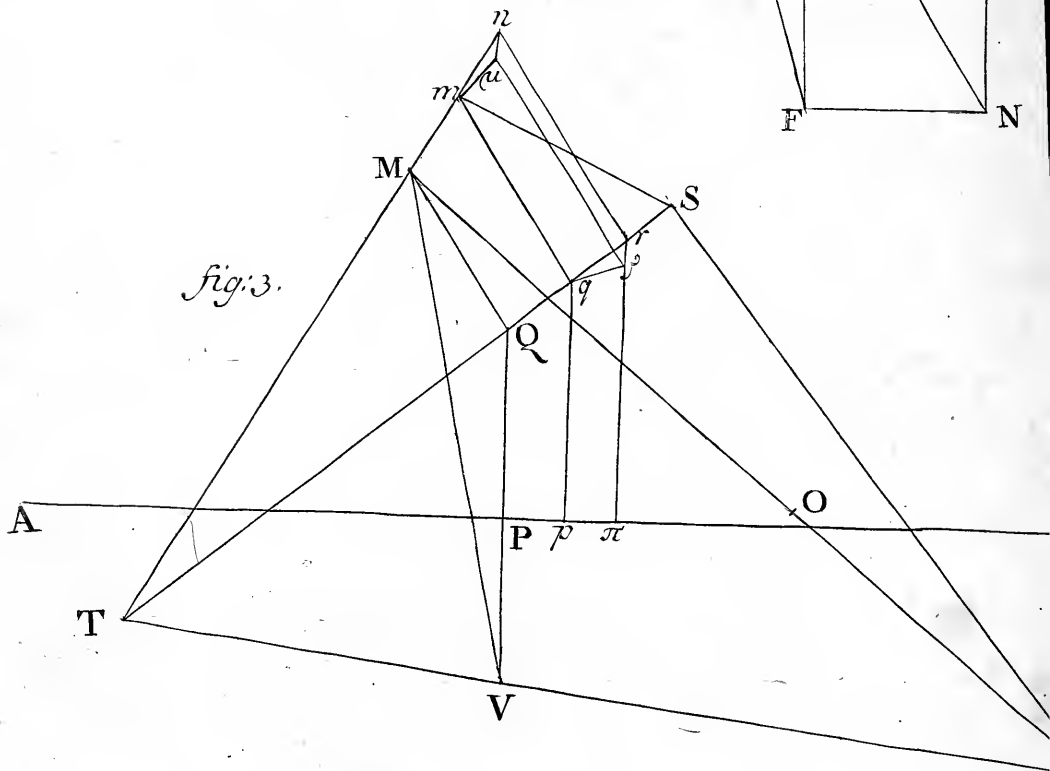
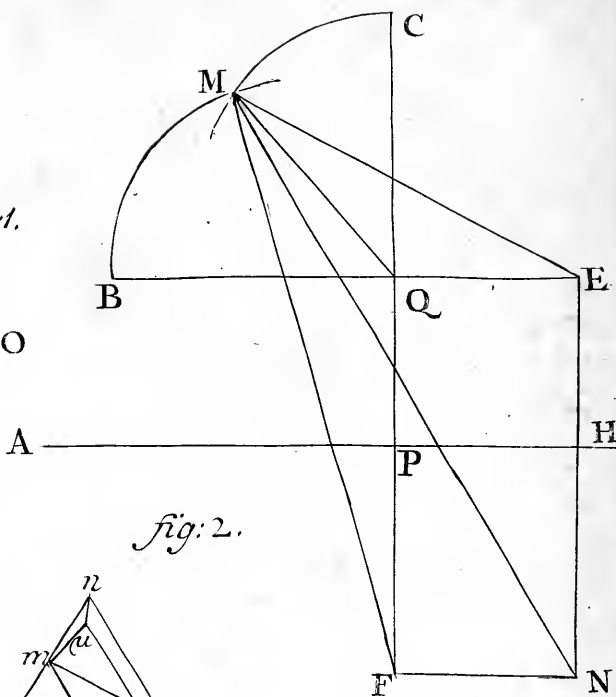
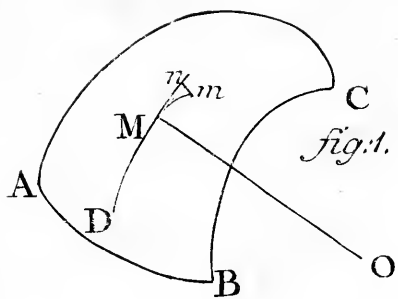
in seriem resoluo, quae erit sequens, $\frac{1}{2} + \frac{3f^*}{16a^2}$
 $+ \frac{27f^*}{256a^4} +$ etc. Vna ergo periodo linea absi-
 promouetur angulo $\frac{135f^2}{a^2}$ graduum, q. pr. si f
 valde est paruum.

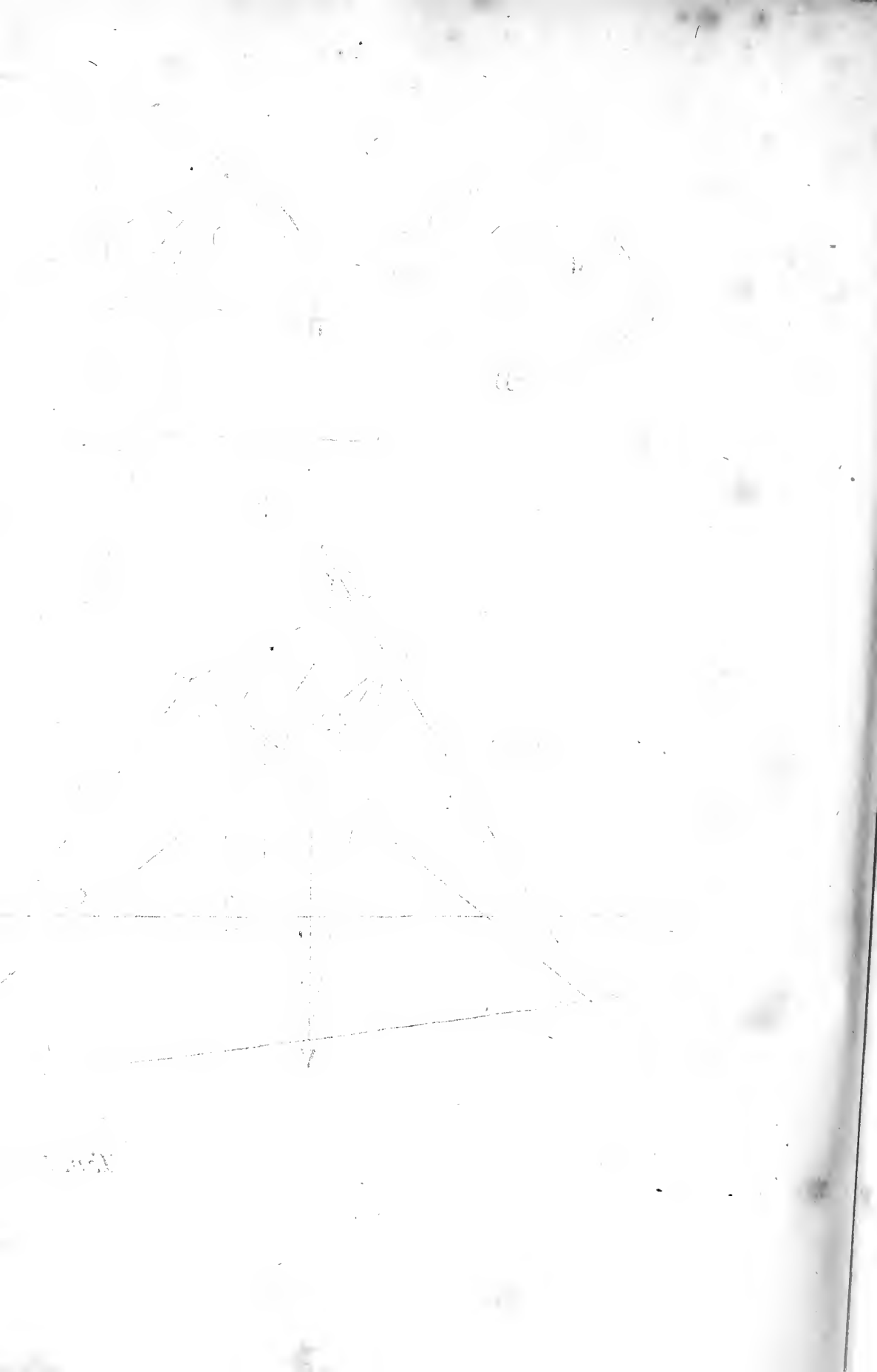
Corollarium 12.

908. Ex his apparet promotionem lineae
 absidum in singulis periodis proxime esse in du-
 plicata ratione sinus anguli BAO.









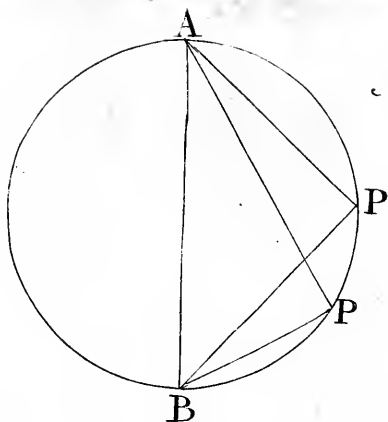


fig: 1.

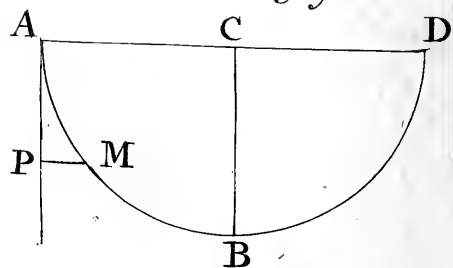


fig: 2.

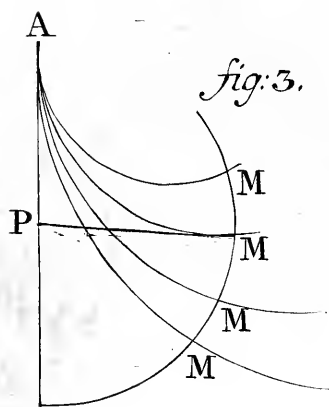


fig: 3.

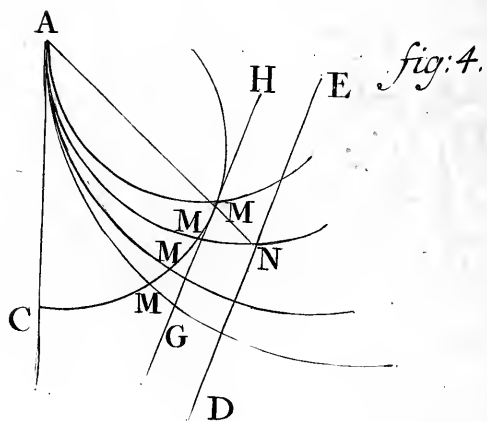


fig: 4.

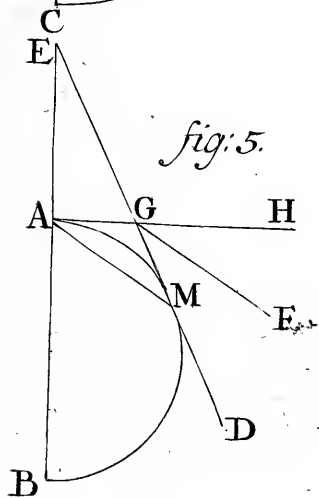


fig: 5.

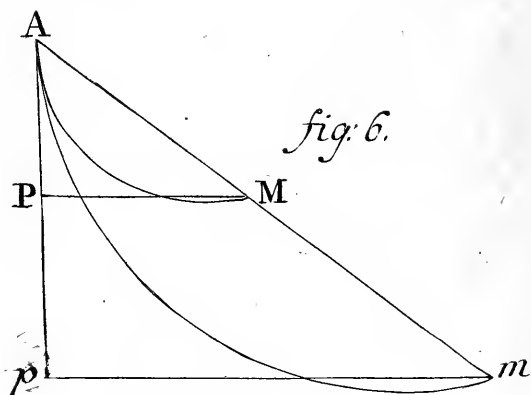


fig: 6.

17

(1)



(2)

(3)

(4)

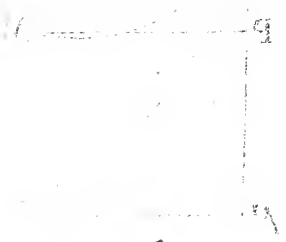
(5)

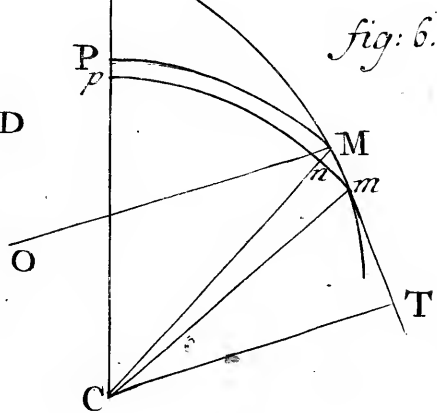
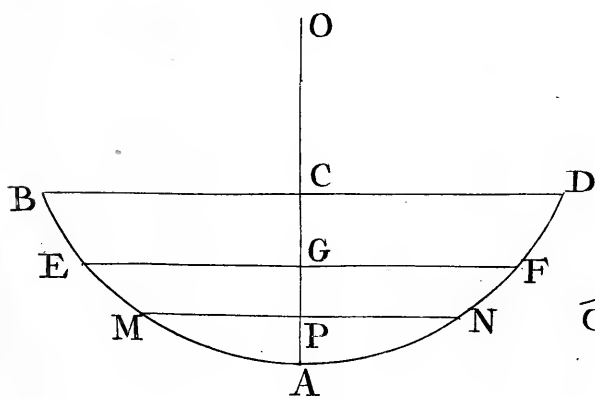
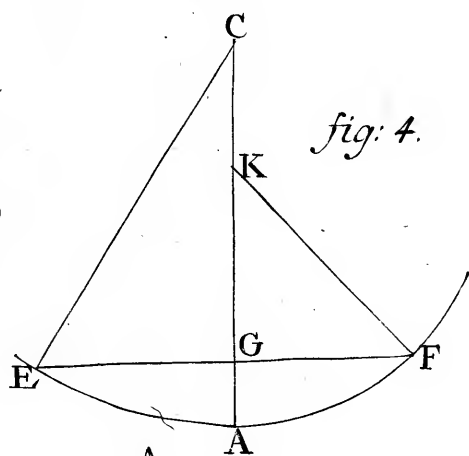
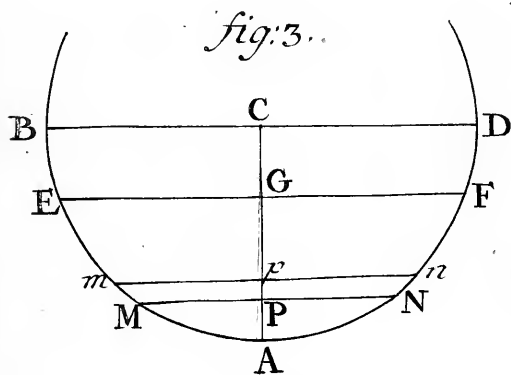
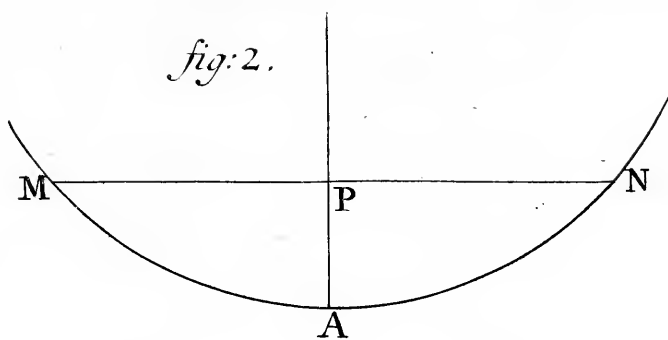
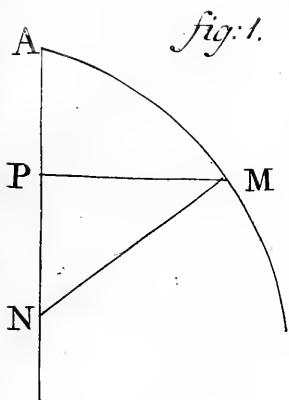
(6)

(7)

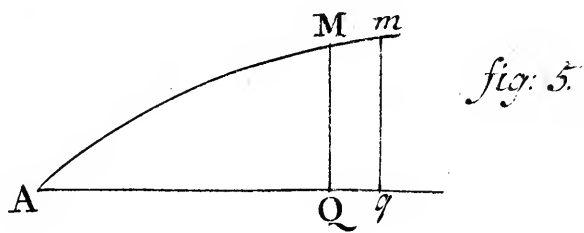
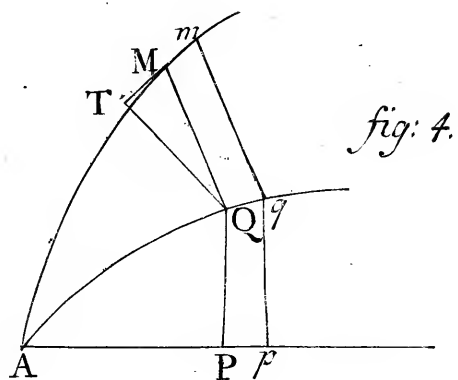
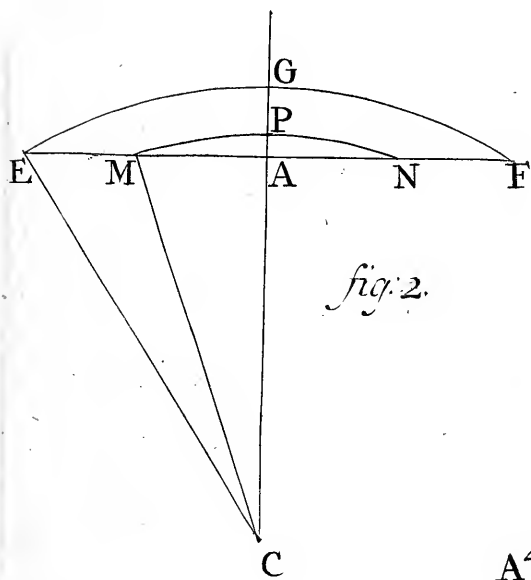
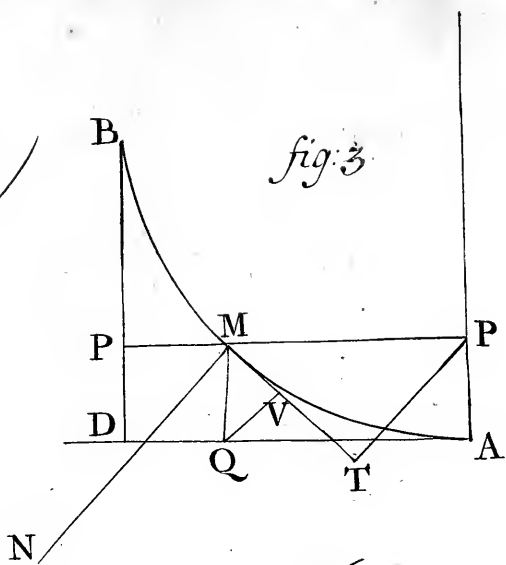
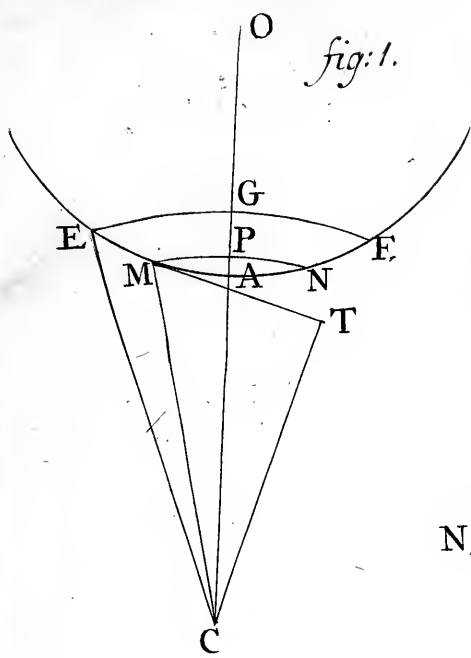
(8)

(9)

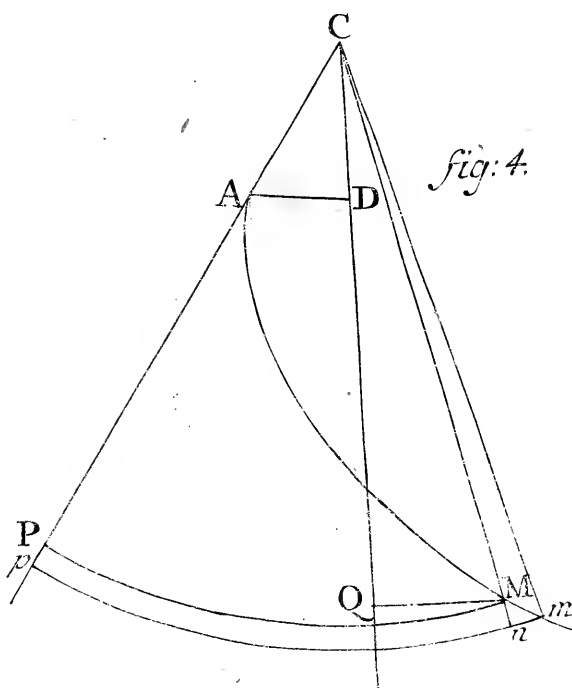
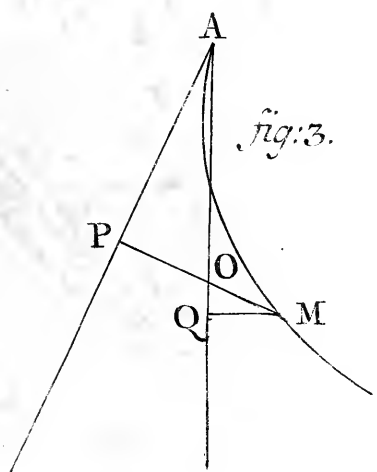
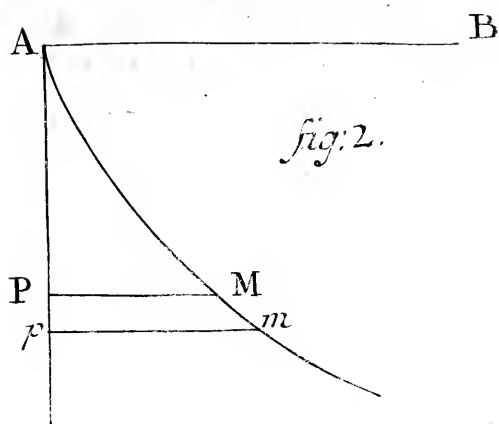
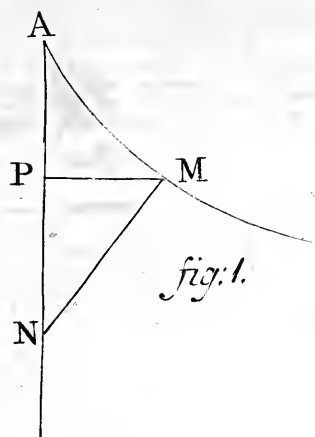




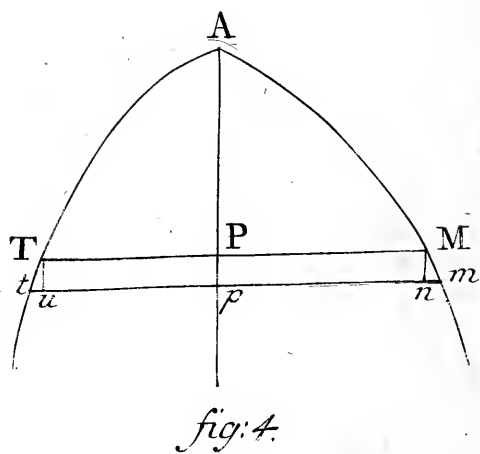
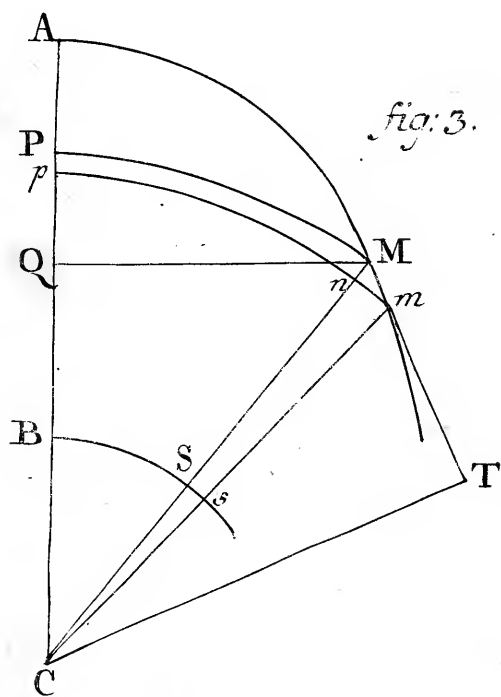
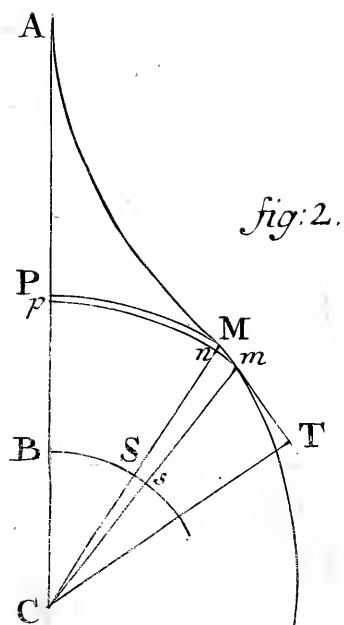
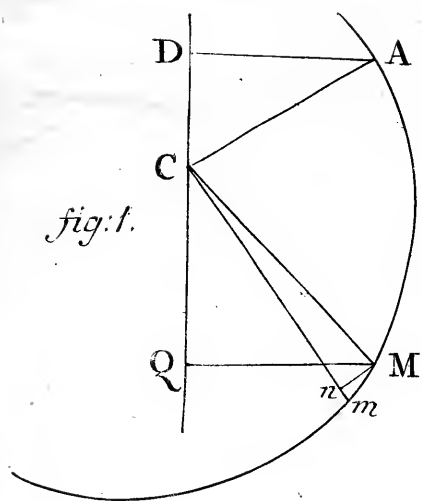




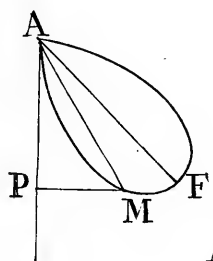
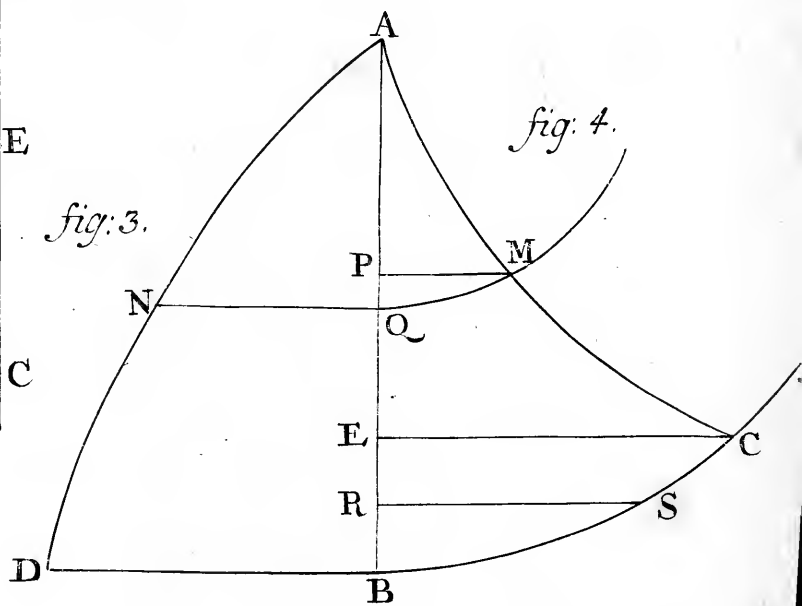
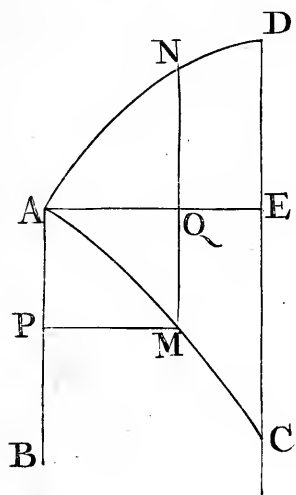
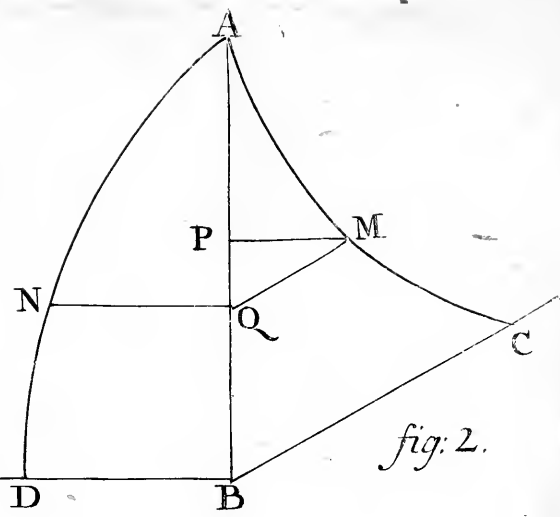
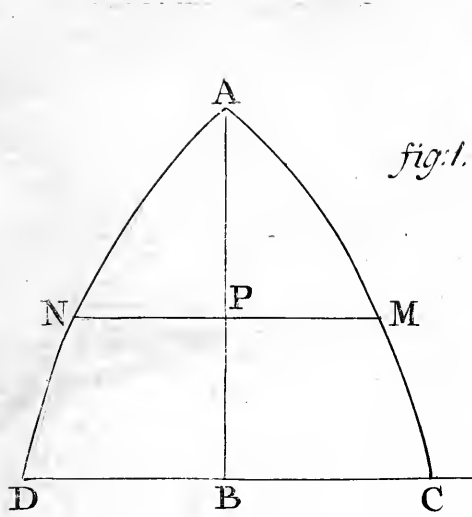


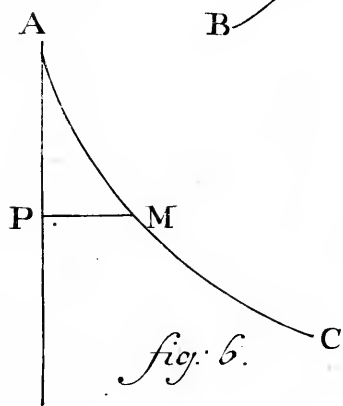
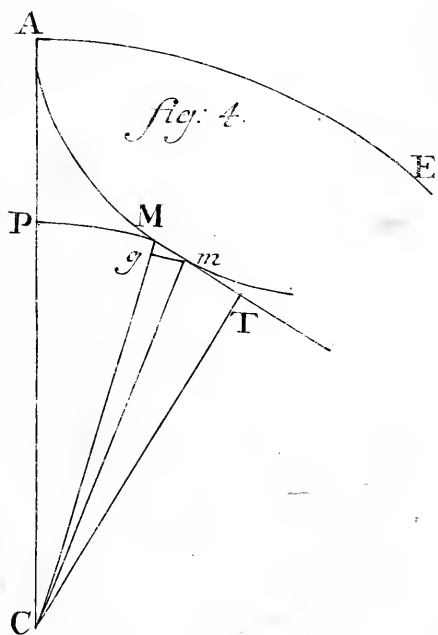
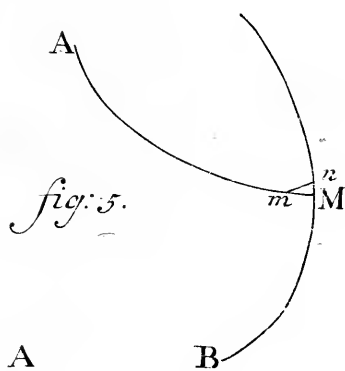
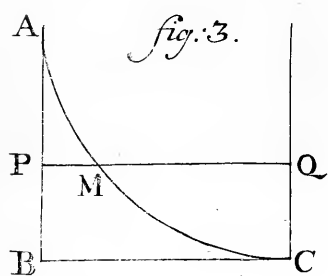
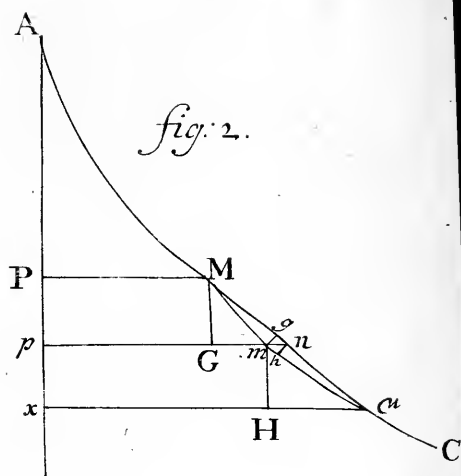
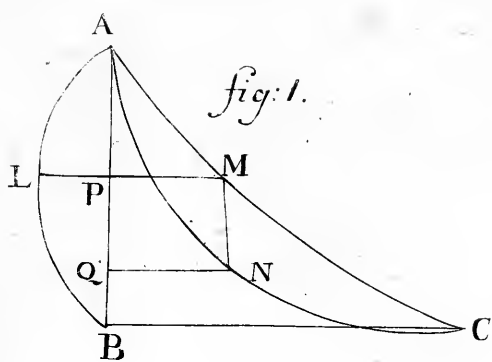




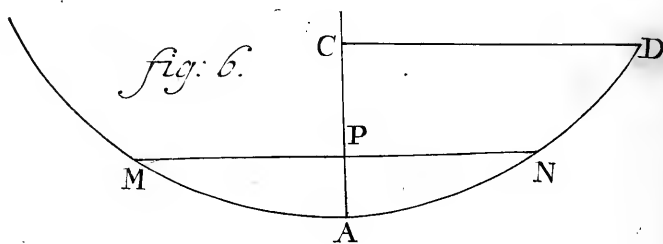
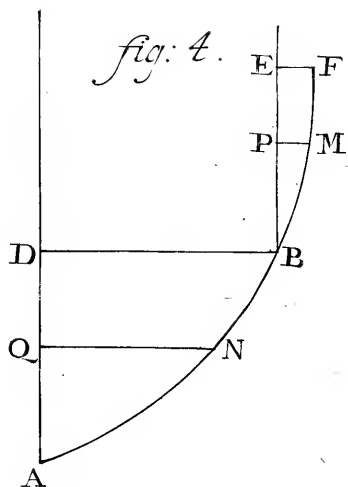
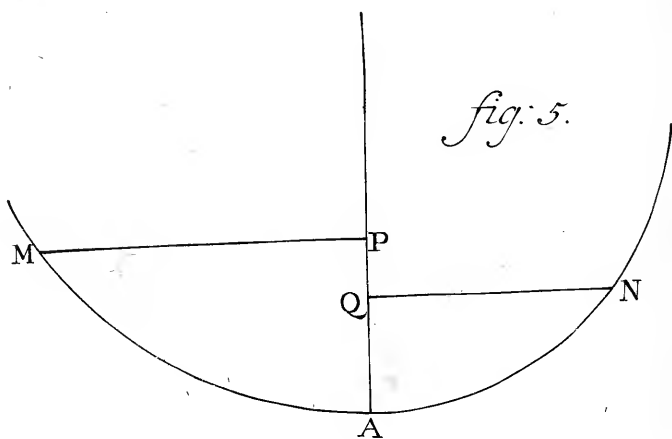
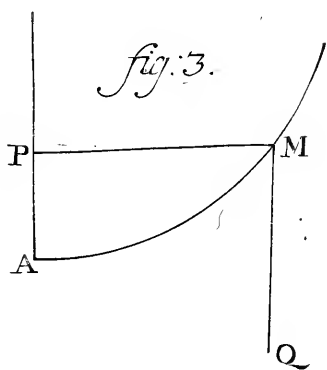
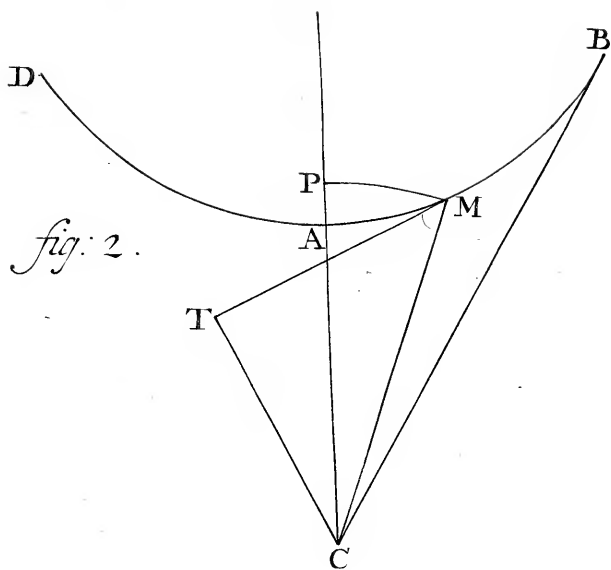
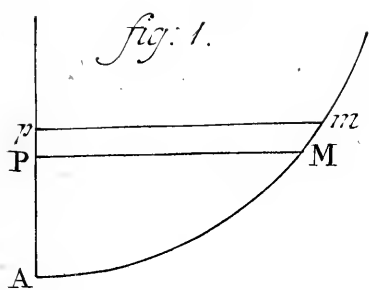






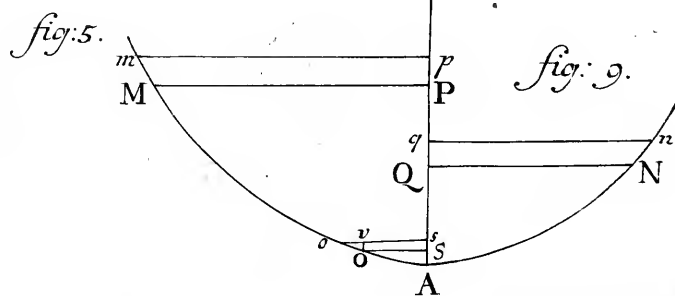
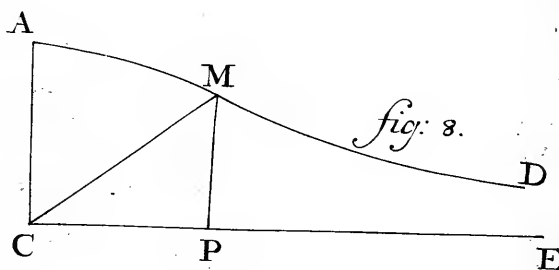
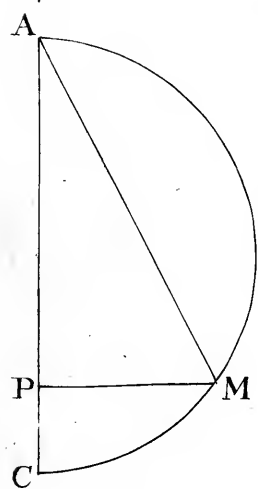
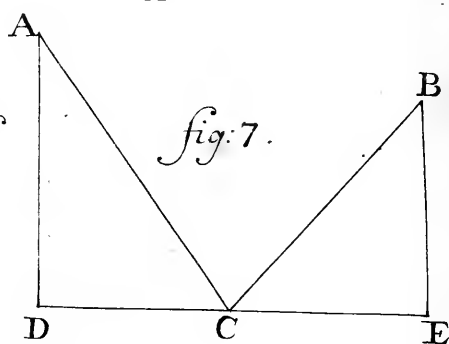
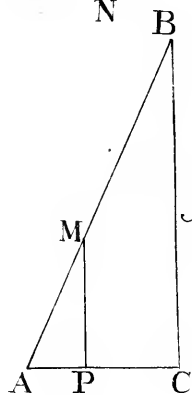
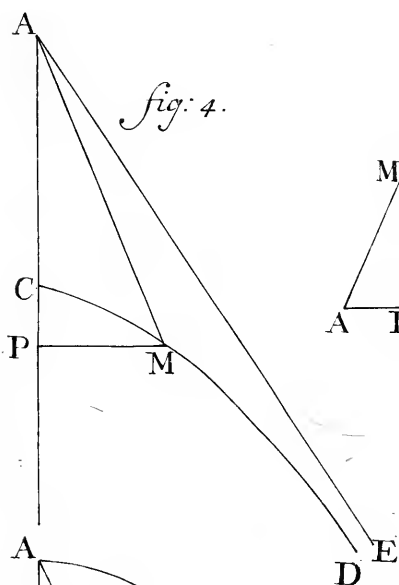
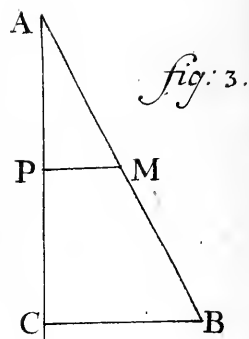
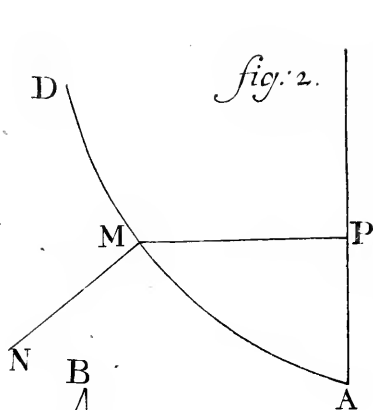
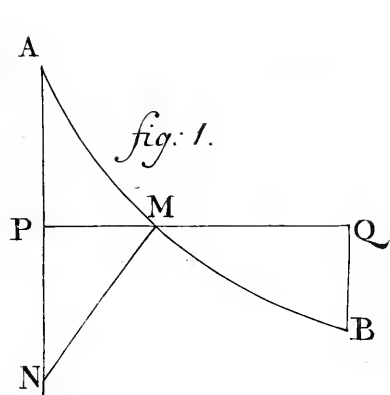






1777

1777



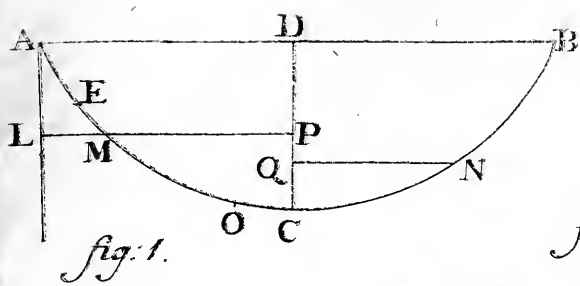


fig. 2.

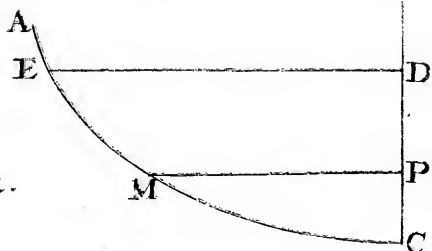


fig. 3.

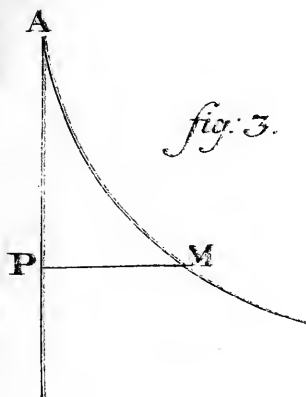


fig. 4.

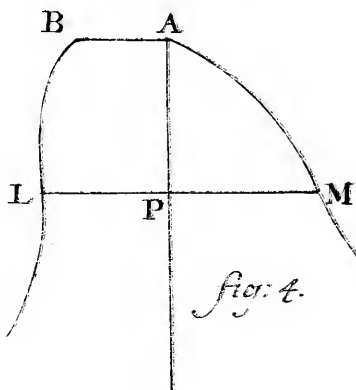


fig. 5.

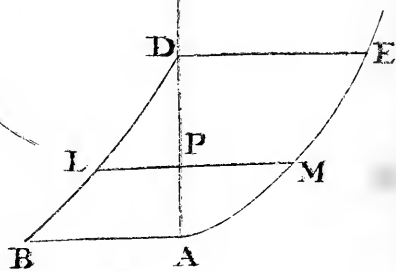


fig. 6.

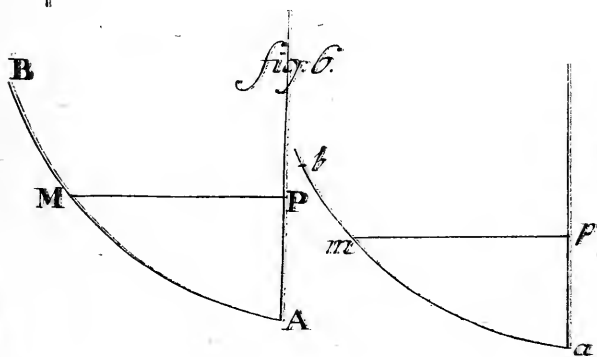
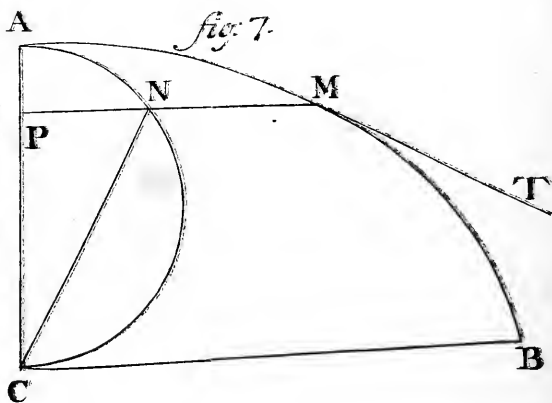
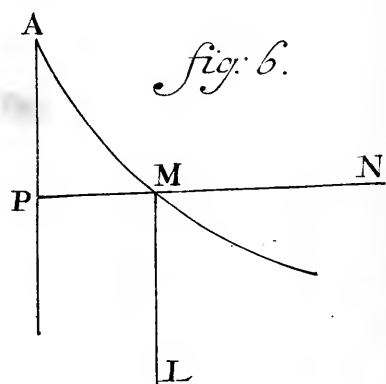
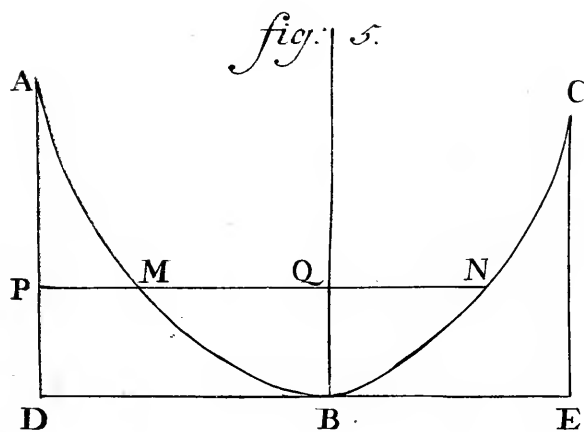
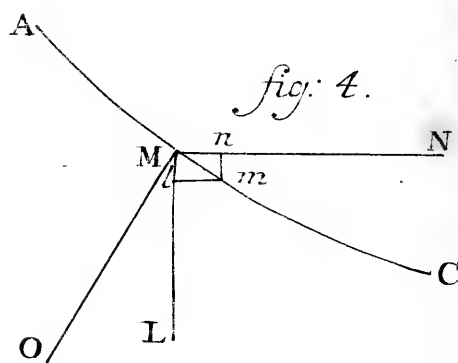
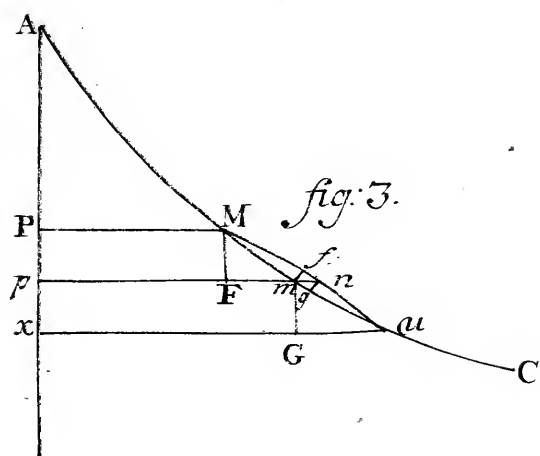
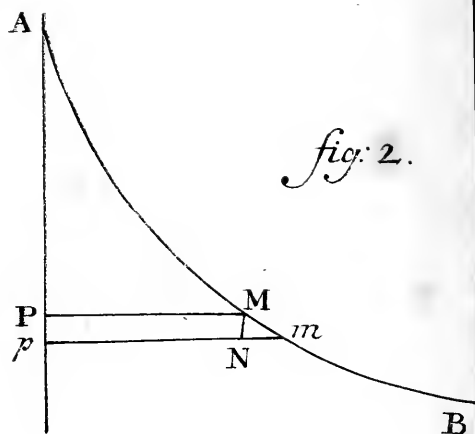
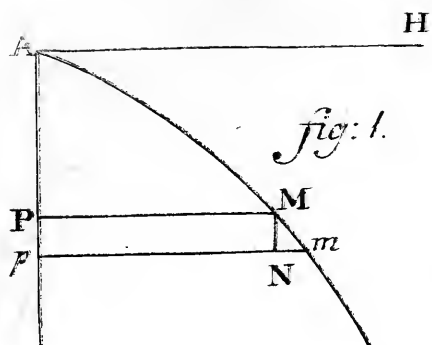


fig. 7.





11

12

13

14

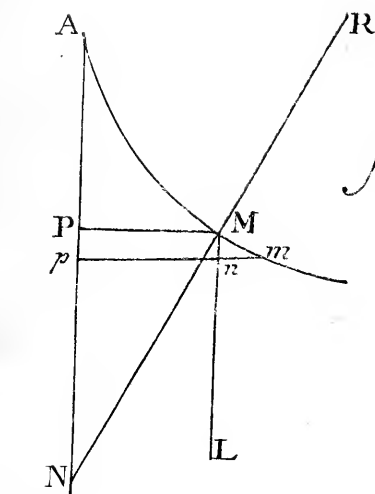


fig. 1.

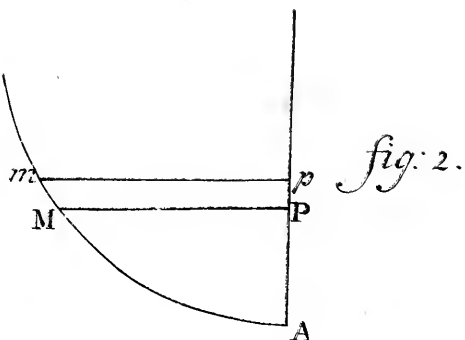


fig. 2.

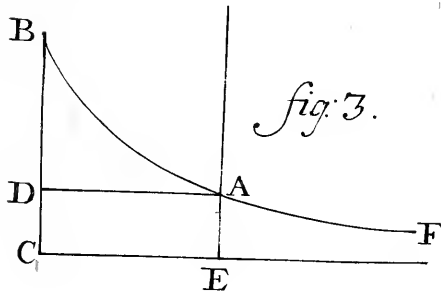


fig. 3.

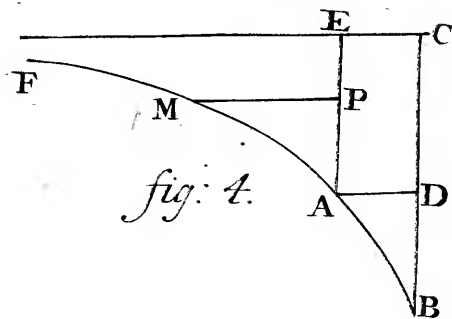


fig. 4.

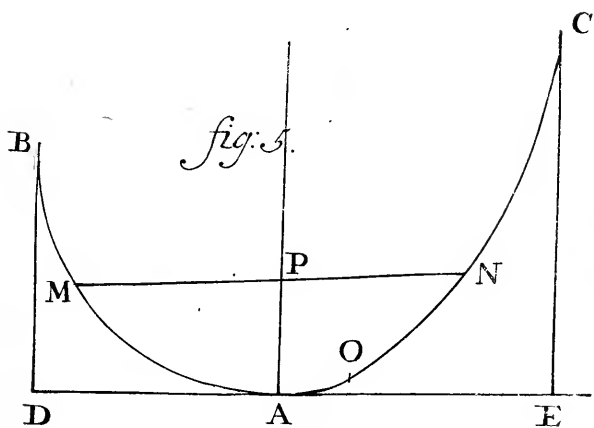


fig. 5.

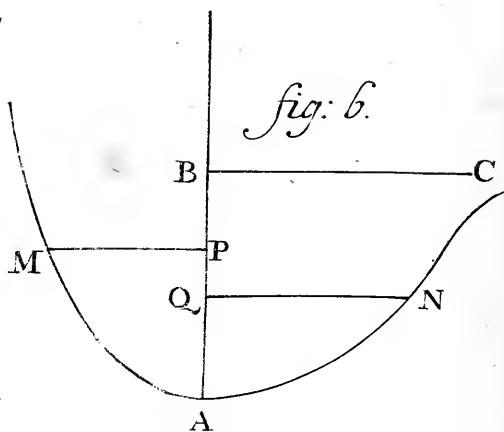
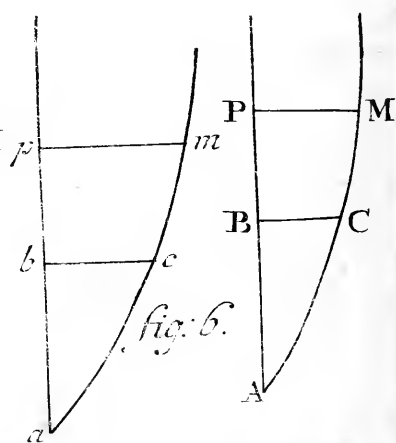
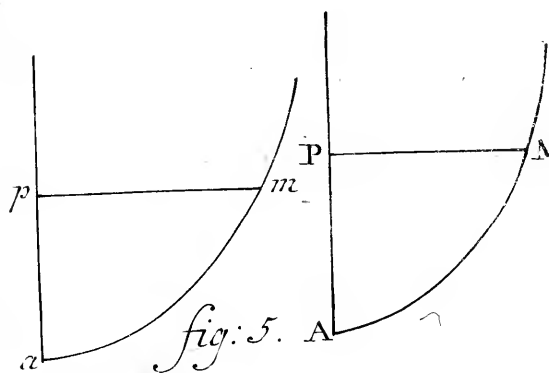
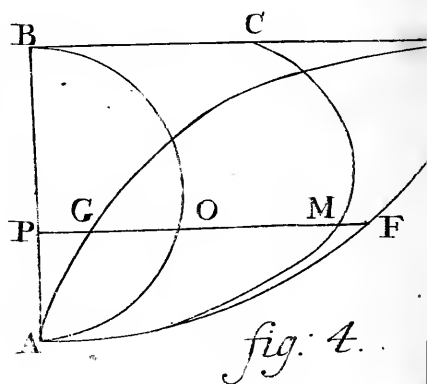
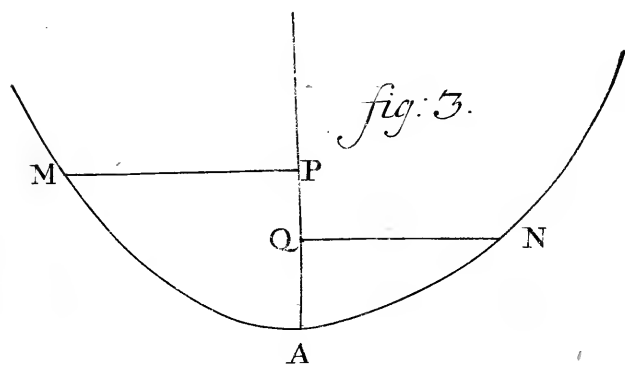
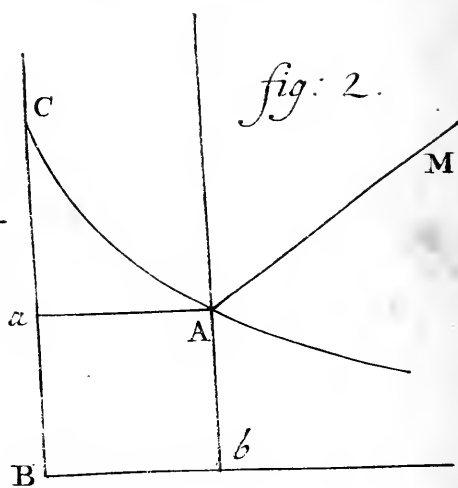
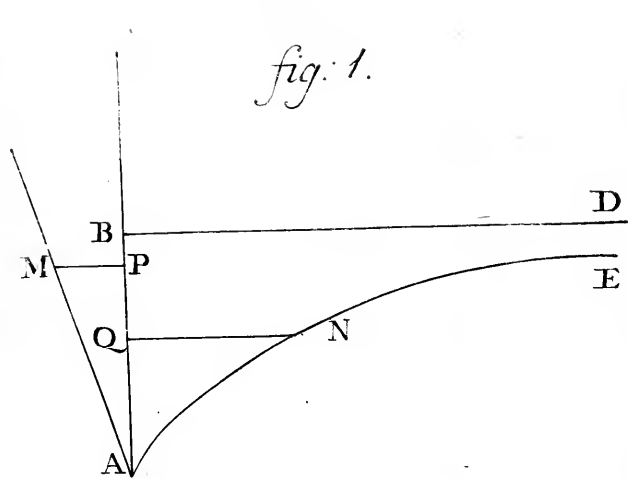
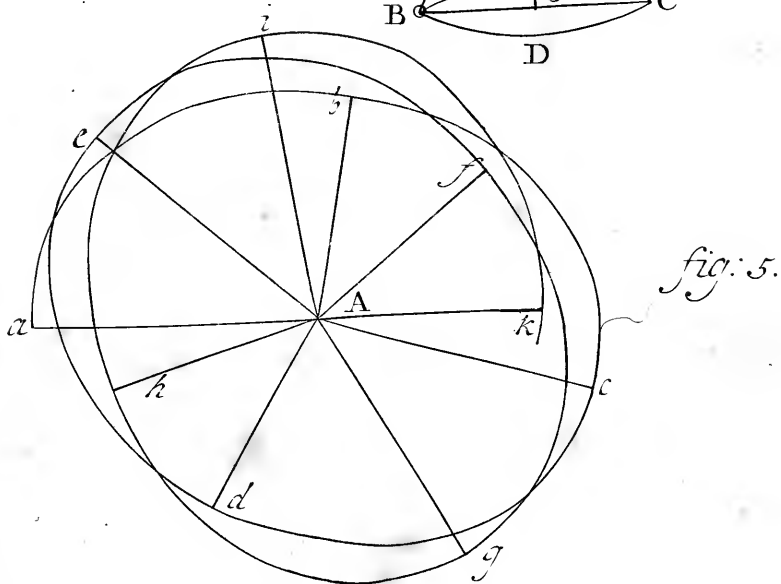
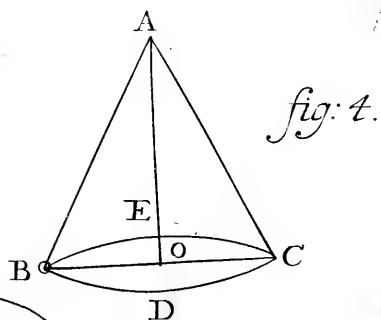
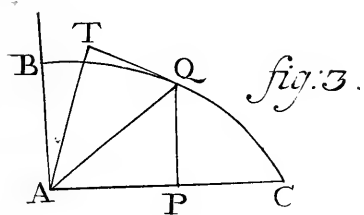
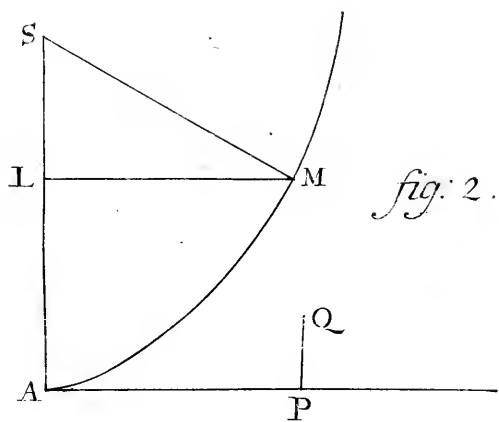
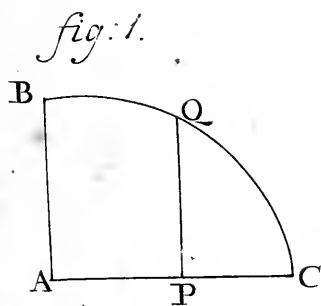


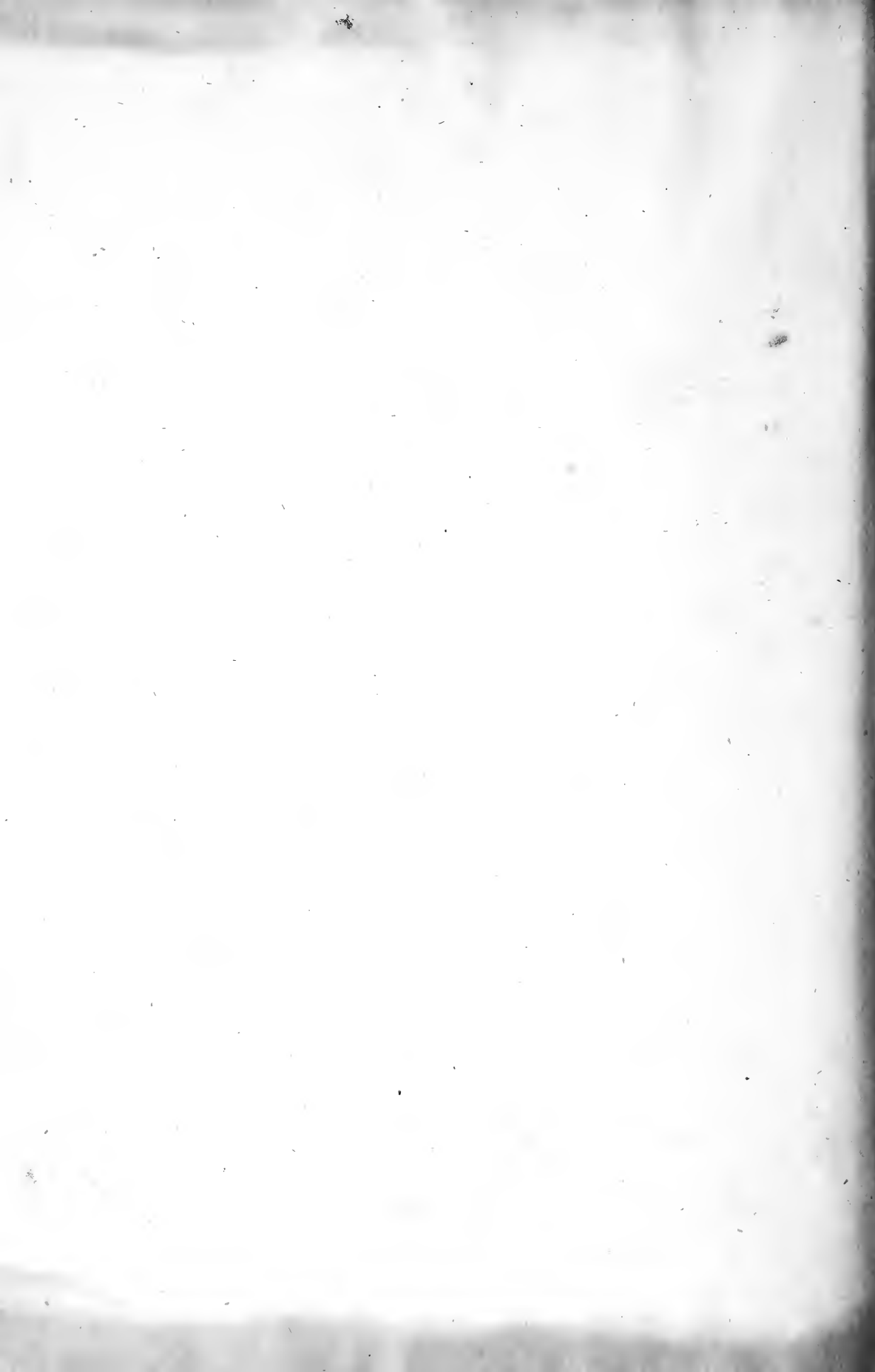
fig. 6.











Vanilla

